Fachhochschule Bingen

Aufgaben für die schriftliche Diplomvorprüfung im SS 2004

FB 2, Studiengang : Ingenieurinformatik 12.07.2004
PRÜFUNGSGEBIET: Wahrscheinlichkeitsrechnung AUFGABENSTELLER: Prof. Dr. Royen
HILFSMITTEL: Vorlesung, Taschenrechner BEARBEITUNGSDAUER: 100 Minuten

1. Bei der Lieferung eines Massenartikels wird vertragsgemäß ein Anteil bis zu $p = 0{,}001$ fehlerhafter Stücke akzeptiert. Der Empfänger prüft in jeder Großlieferung eine Stichprobe mit $n = 500$ Stücken und reklamiert die Lieferung, wenn die Anzahl X fehlerhafter Stücke in der Stichprobe mindestens gleich zwei ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit führt dieses Vorgehen zu einer unberechtigten Reklamation, wenn tatsächlich $p = 0{,}001$ ist ? (Hinweis: Poissonapproximation verwenden !) (4 P)

2. Mit der Wahrscheinlichkeit 0,7 funktioniere eine Maschine mindestens ein Jahr lang störungsfrei. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei 20 unabhängig voneinander arbeitenden Maschinen dieses Typs höchstens zwei Störungen innerhalb eines Jahres auftreten ? (4 P)

3. Zwei Zufallsgrößen X, Y haben die Varianzen $\mathrm{Var}(X) = 13{,}1$ bzw. $\mathrm{Var}(Y) = 7{,}2$, und es sei $\rho = \mathrm{Korr}(X,Y) = 0{,}6$. Welchen Wert hat die Standardabweichung σ von $3X - 5Y$? (4 P)

4. An zwei verschiedenen Hochschulen wird ein bestimmtes Studienfach von Studierenden bewertet. In zwei Zufallsstichroben aus diesen Hochschulen ergaben sich folgende Häufigkeiten für die Gesamtbewertung X mit den möglichen Werten von 1 bis 4:

	Bewertung X:				
Hochschule Nr:	1	2	3	4	∑
1 :	20	42	19	9	90
2 :	48	51	32	7	138

Kann hieraus bereits mit 95%-iger Sicherheit auf eine unterschiedliche Verteilung der Bewertungen dieses Fachs an den beiden Hochschulen geschlossen werden ?
(Zu prüfende Nullhypothese H_o: Die Verteilung von X ist an beiden Hochschulen identisch.) (4 P)

5. Aus einer Zufallsstichprobe mit $n = 140$ Wertepaaren (x_i, y_i) zweier stetig verteilter Merkmale X,Y ergibt sich ein Stichprobenkorrelationskoeffizient $r = 0{,}63$. Berechnen Sie hieraus mit Hilfe der Fisher-Transformation ein 90-%-Konfidenzintervall für den unbekannten wahren Korrelationskoeffizienten ρ von X mit Y. (4 P)

6. (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gilt für die empirische Verteilungsfunktion F_n aus einer Zufallsstichprobe mit $n = 8100$ Werten eines stetig verteilten Merkmals X mit der unbekannten Verteilungsfunktion F, daß $\sup |F_n(x) - F(x)| = 0{,}01$ ausfällt ? (2 P)

   (b) Wie groß muß n mindestens gewählt werden, damit $P\{\sup |F_n(x) - F(x)| = 0{,}01\} \geq 0{,}95$ gilt ? (3 P)

Benötigte Zwischenwerte und Endergebnisse bitte mit mindestens vier korrekten Dezimalstellen angeben.
Der Lösungsweg jeder Aufgabe muß nachvollziehbar dargestellt sein !
Bitte Name in Druckschrift und Matrikelnummer auf dem Deckblatt der Klausur angeben.

LÖSUNGEN

1.)

$$\mu = n \cdot p = 500 \cdot 0{,}001 = 0{,}5$$
$$P\{X \geq 2\} = 1 - \mathrm{e}^{-\mu}(1+\mu)$$
$$X \sim P(\mu), \quad \text{falls} \quad p = 0{,}001$$

2.)

$$X = \text{Anzahl Störungen} \sim B(20;\ 0{,}3)$$
$$P\{X \leq 2\} = \binom{20}{0} 0{,}3^0 \cdot 0{,}7^{20} + 20 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7^{19} + \frac{20 \cdot 19}{2} 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^{18} = 0{,}03548313$$

3.)

$$\sigma = \sqrt{9\,\mathrm{Var}(X) + 25\,\mathrm{Var}(Y) - 30 \cdot 0{,}6 \sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}} = \sqrt{123{,}0867282} = 11{,}0944458$$

4.)

$$\tilde{\chi}^2 = \frac{228^2}{90 \cdot 138}\left(\frac{20^2}{68} + \frac{42^2}{93} + \frac{19^2}{51} + \frac{9^2}{16} - \frac{90^2}{228}\right) = 6{,}1305 < \chi^2(0{,}95;\ 3) = 7{,}81$$

$\Rightarrow$ kein signifikanter Unterschied auf dem 5%- Niveau

5.)

$$Z = 0{,}741416144$$
$$\frac{Z_{0{,}05}}{\sqrt{n-3}} = \frac{1{,}645}{\sqrt{137}} = 0{,}140541834$$
$$(Z_1;\ Z_2) = (0{,}60087431;\ 0{,}881957978)$$
$$(\rho_1;\ \rho_2) = (0{,}5376714;\ 0{,}7073988)$$

6.)

a) $P\{D_n \leq 0{,}9\} = K(0{,}9) = 0{,}60727$

b) $k_{0{,}95} = 1{,}36$

$\sqrt{n} \cdot 0{,}01 \geq 1{,}36$

$\Rightarrow \quad n \geq 136^2 = 18496$