I NUMERISCHE METHODEN ZUR LÖSUNG VON GLEICHUNGEN

1 Fehler und Genauigkeit

1.1 Fehlerarten

(a) Rundungsfehler: Runden: $4,7562 \begin{cases} \rightarrow & 4,756 \\ \rightarrow & 4,76 \end{cases}$

Abschneiden: $4,756 \rightarrow 4,75$

(b) Verfahrensfehler: (Rundungsfehler bei Rechenoperationen)

Bsp: $1,492 \cdot 1,066 = 1,590472 \rightarrow 1,590$

$\underbrace{1,492 \cdot 1,066}_{1,590} \cdot 1,739 = 2,765010 \rightarrow 2,765$

$1,492 \cdot \underbrace{1,066 \cdot 1,739}_{1,854} = 2,766168 \rightarrow 2,766$

(c) Fehler in den Eingabedaten

(d) Abbruchfehler

Bsp: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots \frac{1}{k^2} \Big| + \frac{1}{(k+1)^2}$

1.2 Fehlergrößen

Sei $\overline{x}$ ein Näherungswert für x. Dann heißt

(1) $\boxed{\Delta x = | \overline{x} - x |}$ absoluter Fehler von $\overline{x}$

(2) $\boxed{\rho_x = | \frac{\overline{x} - x}{x} | = | \frac{\Delta x}{x} |}$ (absoluter) relativer Fehler von $\overline{x}$

Bsp: $\underset{\text{exakt}}{x} = 0,001;$ $\underset{\text{Näherungswert}}{\overline{x}} = 0,002;$ $\Delta x = 0,001;$ $\rho_x = 1\ (100\%)$

1.3 Gleitpunktzahl (Fließpunktzahl)

Eine reelle Zahl von der folgenden Form heißt Gleitpunktzahl:

$\boxed{x = m \cdot 10^a = \pm 0, a, a_2 \ldots a_p \cdot 10^a}$

$m =$ Mantisse

$\neq 0$ (m nomiert)

a_p $p =$ max. Mantissenlänge (i.A. $p = 8 \ldots 16$)

10^a ganzz. Exponent $|a| \leq q$ (i.A. $q = 99$)

1.4 Numerische Gleichheit

Numerischer Wert = Näherungswert mit einer begrenzten Anzahl von Stellen

$\rightarrow$ $\pi = 3{,}14159$ $\leftarrow$ numerisch Gleich (Gleichheit bis zur 5. Stelle)

korrekte Schreibweise: $\pi \cdot \sqrt{3} = 3{,}14159 \cdot 1,73205 = 5,44139$

$\sqrt{3} = 1,732;$ $\frac{97}{56} = 1,732 \Rightarrow$

nicht korrekt: $\sqrt{3} = \frac{97}{56}$ $\leftarrow$ keinnumerischer Wert; $\sqrt{3} \approx \frac{97}{56}$

2 Das allgemeine Iterationsverfahren

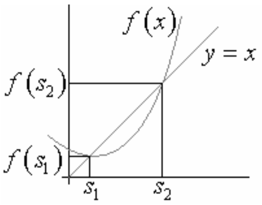
2.1 Fixpunkt

Seien M, N mit $M \in N$ und $f: M \to N$ eine Abbildung. $x \in y$ heißt Fixpunkt von f, wenn $\boxed{f(x) = x}$

Beispiele:

$f(x) = \sin x$	besitzt Fixpunkte:	$0 \quad (\sin 0 = 0)$
$f(x) = x^2$	besitzt Fixpunkte:	$0,1$
$f(x) = x$	besitzt Fixpunkte:	$\mathbb{R}$

2.2 Graphisches Verfahren zur Bestimmung eines Fixpunktes (Schnittstellenverfahren)



$s_1, s_2 =$ Fixpunkte

$\boxed{\text{Fixpunkte von } f(x) = \text{Schnittpunkte des Graphen von } f(x) \text{ und } y = x}$

2.3 Bemerkung

Gleichungen $g(x) = 0$ können stets durch äquivalente Umformungen auf die Fixpunktgleichung $f(x) = x$ gebracht werden.

$$\underbrace{x \text{ Nullstelle von } g(x)}_{g(x)=0} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{x \text{ Fixpunkt von } f(x)}_{f(x)=x}$$

Beispiele:

$$g(x) = e^{-x} - \frac{1}{2}x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 = 2e^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{2e^{-x}}{x} = f_1(x) \\ x = \sqrt{2e^{-x}} = f_2(x) \end{cases} \\ e^{-x} = e^{\ln \frac{x^2}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\ln \dfrac{x^2}{2} = f_3(x) \end{cases}$$

Bemerkung: $\quad g(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = g(x) + x = f_4(x)$

2.4 Kontraktion

Sei $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ eine Abbildung. $f: I \to I$ heißt Abbildung, wenn ein Konstante $0 \le L \le 1$ existiert,

so dass $\underbrace{\boxed{| f(x) - f(y) | \le L \, | x - y |}}_{L\text{: Lipschitz-Konstante}}$ für alle $x, y \in I$.

Kriterium für Kontraktion:

Sei $f: I \to I$ stetig differenzierbar in I mit $\boxed{| f'(x) | \le L < 1}$ für alle $x \in I$,

dann ist f eine Kontraktion mit Lipschitz-Konstante L.

Bew: Seien $x, y \in I$, $x < y$.

Nachdem Mittelwertsatz der Differentialrechnung existiert ein $\xi \in (x,y)$ mit $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(\xi)$.

$\Rightarrow \quad | f(x) - f(y) | = f'(\xi) \, | x - y | \le L \, | x - y |$

2.5 Fixpunktsatz

Sei $f: I \to I$ eine Kontraktion. Es gilt:

(1) f besizt genau einen Fixpunkt $s = f(s)$

(2) Für jeden Startwert $x_0 \in I$ konvergiert die Folge (Iterationsfolge)

$\boxed{x_{k+1} = f(x_k)}$ $\quad k = 0,1,2,\ldots$

gegen den Fixpunkt s.

Bew: $|x_k - s| = |f(x_{k-1}) - f(s)| \leq L\,|x_{k-1} - s| \leq L^2\,|x_{k-2} - s| \leq \ldots \leq L^{k-1}\,|x_1 - s| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad (L<1)$

(3) Es gelten die folgenden Fehlerabschätzungen:

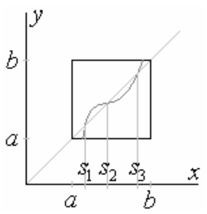
(a) Die A-priori-Fehlerabschätzung (was vorher kommt)

$$\boxed{|x_k - s| \leq \frac{L^k}{1-L}\,|x_1 - x_0|}$$

(b) Die A-posteriori-Fehlerabschätzung (was nachher kommt)

$$\boxed{|x_k - s| \leq \frac{L}{1-L}\,|x_k - x_{k-1}|}$$

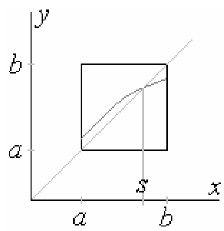
2.6 Geometrische Deutung des Fixpunktsatzes



$f(I) \subset I = [a,b] \quad \Rightarrow \quad$ es existiert ein Fixpunkt und $f(x) \in D_f$

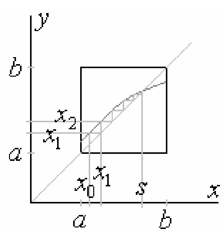
s_1, s_2, s_3 Fixpunkte

Bsp: $\quad f(x) = \dfrac{1}{x} - 1, \quad f(1) = 0, \quad f(0)$ nicht definiert

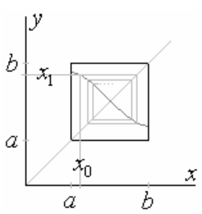


$0 \leq f'(x) < 1 \quad \Rightarrow \quad f$ monoton steigend und Steigung $< 45°$

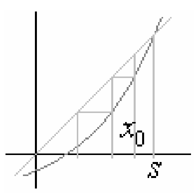
$\Rightarrow$ genau 1 Fixpunkt



$0 < f'(x) < 1$



$-1 < f'(x) < 0$

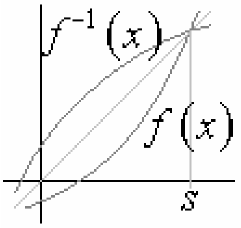


Divergenz

$f'(x) > 1$

2.7 Fixpunkt der Umkehrfunktion

Sei $f : I \to I$ umkehrbar mit $| f'(x) | > 1$ in I



$$\boxed{f(s) = f^{-1}(s)}$$

$$|\left(f^{-1}\right)'(x)| \underset{\substack{\text{Ableitung für}\\ \text{Umkehrfunktion}}}{=} \frac{1}{| f'\left(f^{-1}(x)\right)|} < 1 \text{ in } I$$

$\Rightarrow$ Konvergenz für f^{-1}

$\boxed{\text{Im Fall } | f'(x) | > 1 \text{ in } I \text{ wende Iterationsverfahren auf } f^{-1} \text{ an.}}$

2.8 Bemerkung

Unter der Voraussetzung des Fixpunktes gilt:

$$| x_k - x_{k-1} | \le \varepsilon \frac{1-L}{L} \quad \Rightarrow \quad | x_k - s | < \varepsilon$$

Bew: $| x_k - s | \underset{\text{a-posteriori}}{\le} \frac{L}{1-L} | x_k - x_{k-1} | \le \frac{L}{1-L} \varepsilon \frac{1-L}{L} = \varepsilon$

2.9 Allgemeines Iterationsverfahren

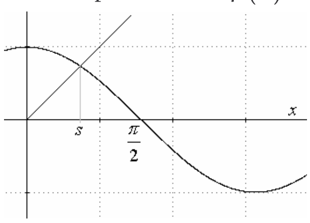
gegeben: $f(x)$ Kontraktion in I mit $L < 1$, $x_0 \in I$ (Startwert),
$\varepsilon > 0$ (Fehlergrenze), N (max Anzahl der Iterationsschritte)

gesucht: $s = f(s)$ Fixpunkt

1. Für $k = 1, 2, \dots N$
2. bestimme $x_k = f(x_k - 1)$
3. falls $| x_k - x_{k-1} | < \varepsilon \frac{1-L}{L}$, gehe nach 4. $\left(| x_k - s | < \varepsilon,\ \text{siehe 2.8}\right)$
4. setze $s = x_k$

Bsp1: Man bestimme die Fixpunkte von $f(x) = \cos x$

graphisch:



numerisch: $|\left(\cos x\right)'| = |\sin x| < 1$ in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

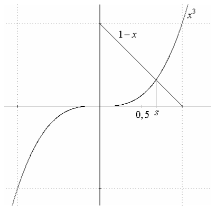
Iterationsvorschrift: $\boxed{x_0 = \frac{\pi}{4}, \quad x_k = \cos\left(x_{k-1}\right)}_{k=1,2,\dots}$

$$x_0 = \frac{\pi}{4} = 0,785399 \quad x_1 = 0,707106 \quad x_2 = 0,760245 \quad x_3 = 0,724667$$

exakter Wert: $0,7390851$

Bsp2: Man bestimme die Nullstelle von $g(x) = x^3 + x - 1$

graphisch: $g(x) = x^3 + x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = 1 - x$



numerisch: $g(x) = x^3 + x - 1 = x(x^2+1) = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{1}{1+x^2} = f(x)$

Für alle $x \in [0,5 \,|\, 1]$ gilt $|f'(x)| < 1$

$$|f'(x)| = \left|\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right| = \frac{2x}{1+2x^2+x^4} \le \frac{2x}{1+2x \cdot 0,5 + 0,5^4} = \frac{x+x}{1,0625+x} = L < 1 \quad \left(\begin{array}{l}\text{max Wert, der die Abl}\\ \text{im Intervall annimmt}\end{array}\right)$$

$\boxed{x_k = f(x_{k-1}) = \dfrac{1}{1+x^2_{k-1}}}$ konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in [0,5 \,|\, 1]$ gegen s.

$x_0 = 0,5 \quad x_1 = 0,8 \quad x_2 = 0,61 \quad x_3 = 0,729 \quad x_4 = 0,653$

exakter Wert: $s = 0,682388$

$g(x) = x^3 + x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 - x^3 = h(x)$

$|h'(x)| = |-3x^2| = 3x^2 > 1$ in einer Umgebung der Nullstelle

$x_k = h(x_{k-1})$

(1) $x_0 = 1 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 0$ keine Konvergenz

(2) $x_0 = 0,5 \quad x_1 = 0,875 \quad x_2 = 0,330 \quad x_3 = 0,964 \quad x_4 = 0,104 \quad x_5 = 0,999$ keine Konvergenz

(3) $x_0 = 2 \quad x_1 = -7 \quad x_2 = 344 \quad x_3 = -4,071 \cdot 10^7$ keine Konvergenz

2.10 Bestimmung der erforderlichen Iterationsschritte N bei vorgegebener Fehlergrenze $\varepsilon > 0$

$$\boxed{N \ge \frac{\ln(\varepsilon(1-L)) - \ln|x_1 - x_0|}{\ln L}}$$

f Kontraktion mit Lipschitz $L < 1$
x_0 Startwert
$x_1 = f(x_0)$

Bew: $|x_k - s| \underset{\text{A-priori}}{\le} \dfrac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad L^k |x_1 - x_0| < \varepsilon(1-L) \quad \Leftrightarrow \quad L^k < \dfrac{\varepsilon(1-L)}{|x_1 - x_0|} \quad \Leftrightarrow \quad \ln L^k < \ln\left(\dfrac{\varepsilon(1-L)}{|x_1 - x_0|}\right)$

$$\Leftrightarrow \quad k > \frac{\ln(\varepsilon(1-L)) - \ln|x_1 - x_0|}{\ln L}$$

2.11 Bemerkungen (Anwendungen des Fixpunktsatzes)

(1) eine Menge M wird der Menge N über die Funktion f zugeordnet

(2) Ökonomie: X, Y, Z

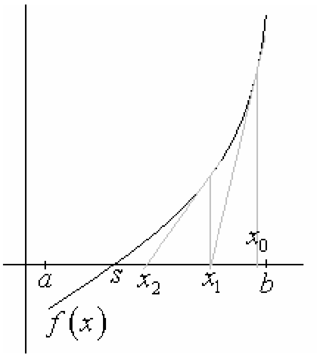
$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \rightarrow \vec{q} = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix} \qquad f = \text{Preiseinpendelungsmechanismus}$$

(3) Physik
optimale Flugbahn von Erde zu Mond

3 Newtonsche Iterationsverfahren und Regula Falsi

3.1 Newtonsche Iterationsfolge

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit $f(s)=0$ für ein $s\in[a,b]$ und $f'(x)\neq 0$ in $[a,b]$



$$\tan\alpha = f'(x_0)=\frac{f(x_0)}{x_0-x_1} \quad\Rightarrow\quad x_0-x_1=\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad\Rightarrow$$

$$x_1 = x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad\Rightarrow$$

$$x_2 = x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad\Rightarrow$$

$$\ldots$$

$$x_k = x_{k-1}-\frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$$

Iterationsfolge: $\boxed{x_k = x_{k-1}-\frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}}$ $\quad x_0 = \text{Startwert}$

Newton - Iterationsverfahren

3.2 Newtonsches Iterationsverfahren

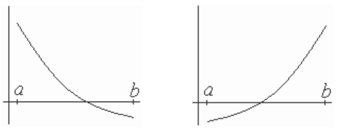
gegeben: $f(x)$, x_0 Startwert, $\eta>0$ (Fehler), N (Anzahl der Iterationsschritte)
gesucht: Nullstelle $f(s)=0$

1. Für $k=1,2,\ldots N$
2. bestimme $x_0 = x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
3. falls $\left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right|<\eta$, dann gehe nach 4.
4. setze $s=x_0$

3.3 Konvergenz des Newton-Verfahrens

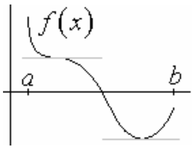
Wähle $[a,b]$ so, dass

(a) $f(a)\cdot f(b)<0$



d.h. [a,b] enthält Nullstelle

(b) $f'(x)\neq 0$ in $[a,b]$

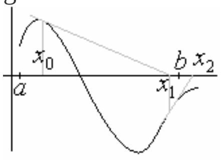


d.h. $f(x)$ hat in [a,b] keinen Extremwert und Sattelpunkt

(c) $f''(x)\neq 0$ in $[a,b]$, d.h. f besitzt in $[a,b]$ keinen Wendepunkt

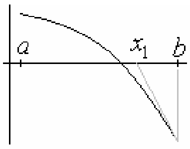
Wählt man als Startwert $x_0\in\{a,b\}$ mit $f(x_0)\cdot f''(x_0)>0$, so konvergiert das Newton-Verfahren

geometrische Deutung



Divergenz

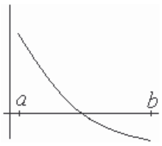
$f(b)\cdot f''(b)>0$



$\boxed{f''<0}$

konkav (rechtsgekrümmt)

$f(a)\cdot f''(a)>0$



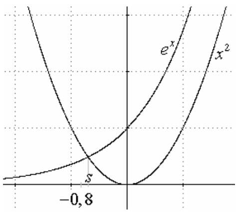
$\boxed{f''>0}$

konvex (linksgekrümmt)

3.4 Beispiele

Man bestimme eine Nullstelle $f(x)=e^x-x^2$

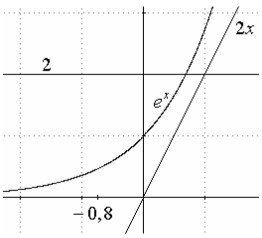
graphisch: $e^x-x^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x=x^2$



s = Nullstelle von e^x-x^2

numerisch: $f'(x)=e^x-2x\neq 0$ in $[\text{-0,8}|0]$

$f''(x)=e^x-2\neq 0$ in $[\text{-0,8}|0]$



$$f(-0{,}8)\cdot f''(-0{,}8)=\left(e^x-x^2\right)\left(e^x-2\right)\Big|_{x_0=-0,8}=0{,}296>0$$

$\Rightarrow$ die Folge $\boxed{x_{n+1}=x_n-\dfrac{e^{x_n}-x_n{}^2}{e^{x_n}-2x_n}}$ konergiert gegen die Nullst. von e^x-x^2.

n	0	1	2	3	4
x_n	$-0{,}8$	$-0{,}706959$	$-0{,}703472$	$-0{,}703467$	$-0{,}703467$

Probe: $f(-0{,}703467)=0{,}803\cdot 10^{-6}$

3.5 Regula Falsi (Sekantenverfahren)

Ersetzt man im Newton-Verfahren $f(x)$ durch den Differenzenquotionten, so erhält man ein Iterationsverfahren, das Regula Falsi genannt wird.

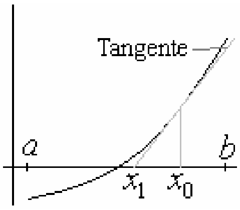
$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\approx\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad (x \text{ nahe bei } x_0)$$

Newton-Verfahren: $\boxed{x_{n+1}=x_n-f(x_n)\cdot\dfrac{1}{f'(x_n)}}$ $\quad x_0$ Startwert

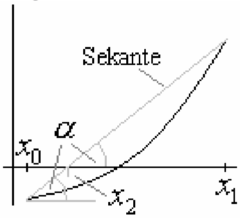
Regula Falsi: $\boxed{x_{n+1}=x_n-f(x_n)\cdot\dfrac{x_n-x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})}}$ $\quad x_0, x_1$ Startwert

Geometrische Deutung

Newton-Verfahren



Regula Falsi



x_0, x_1 Startwerte; $f(x_0)\cdot f(x_1) < 0$

$$\tan\alpha = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{f(x_1)}{x_1-x_2} \quad\Rightarrow\quad (x_1-x_2)\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = f(x_1)$$

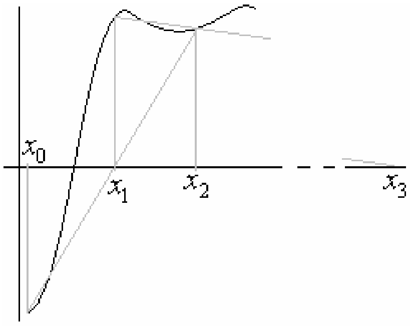
$$\Rightarrow\quad x_1-x_2 = f(x_1)\frac{x_1-x_0}{f(x_1)-f(x_0)} \quad\Rightarrow\quad x_2 = x_1 - \underbrace{f(x_1)\frac{x_1-x_0}{f(x_1)-f(x_0)}}_{c}$$

$($= iterierter Wert bei Regula Falsi$)$

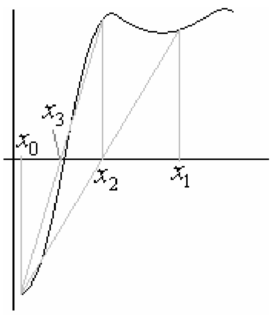
3.6 Konvergenz der Regula Falsi

Konvergenz ist gesichert, wenn stets $\boxed{f(x_n)\cdot f(x_{n+1}) < 0}$, d.h. wenn $[x_n, x_{n+1}]$ bzw. $[x_{n+1}, x_n]$ Nullstelle enthält.

Divergenz



Konvergenz
Intervallschachtelung (immer konvergent)

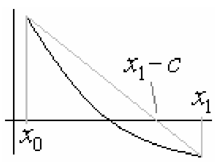


3.7 Regula Falsi

gegeben: $f(x)$, x_0, $x \in [a,b]$ mit $x_0 < x$, und $f(x_0)\cdot f(x_1) < 0$, $\eta > 0$ (Fehler), N

gesucht: $f(s) = 0$

1. Für $k = 1, 2, \ldots N$
2. bestimme $c = f(x_1)\dfrac{x_1-x_0}{f(x_1)-f(x_0)}$
3. falls $f(x_0)\cdot f(x_1-c) < 0$, dann $x_1 = x_1 - c$
4. sonst $x_0 = x_1 - c$
5. falls $|c| \le \eta$, gehe nach 6.
6. setze $s = x_1$



3.8 Definition

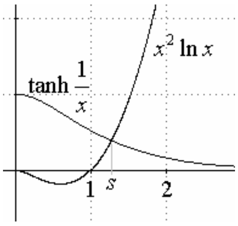
Iterationsverfahren, die für die Berechnung von x_n nur eine vorhergehende Näherung benötigen, heißen Einzelschrittverfahren.
Sinngemäß sind Mehrschrittverfahren definiert.

Bsp: Einzelschrittverfahren: Newton- und allgemeine Iterationsverfahren
Zweischrittverfahren: Regula Fasli

3.9 Beispiel

Man bestimme eine Lösung von $f(x) = x^2 \ln x - \tanh \frac{1}{x} = 0$.

graphisch:



numerisch: $x_0 = 1,\ x_1 = 2$ (Startwerte), $x_{n+1} = x_n - f(x_n)\dfrac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$

n	2	3	4	5
x_n	1,24790	1,33937	1,36912	1,37837

4 Nullstellen von Polynomen

4.1 Polynom

Polynom von Grad n: $\boxed{P_n(x) = a_0 x^n + \ldots + a_{n-1}x + a_n}$ $a_0 \neq 0$

Produktdarstellung: $P_n(x) = a_0(x - x_1)\ldots\underbrace{(x - x_n)}_{\text{Linearfaktor}}$

$x_i \in \mathbb{C}$ Nullstellen

„Fundamentalsatz der Algebra“

4.2 Polynomdivision

Bsp: $P_3(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 5$

$$
\begin{array}{l}
(2x^3 - 3x^2 + \quad x + 5) : (x - 2) = 2x^2 + x + 3 + \dfrac{11}{x-2} \\
-(2x^3 - 4x^2) \\
\hline
\qquad x^2 + \quad x + 5 \\
\quad -(x^2 - 2x) \\
\hline
\qquad\quad 3x + 5 \\
\qquad -(3x - 6) \\
\hline
\qquad\quad R = 11
\end{array}
$$

$$\frac{P_3(x)}{x-2} = P_2(x) + \frac{R}{x-2}$$

$$\boxed{P_3(x) = P_2(x)\cdot(x-3) + R; \quad R = P_3(2)}$$

$P_2(x)$=reduziertes Polynom

Allgemein $(n = 3)$

$$(a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3) = (b_0x^2 + b_1x + b_2)(x - p) + R \qquad \text{gesucht sind: } b_0, b_1, b_2, R$$

$$= b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x - b_0px^2 - b_1px - b_2p + R = b_0x^3 + (b_1 - b_0p)x^2 + (b_2 - b_1p)x + (R - b_2p)$$

Koeffizientenvergleich

$\Rightarrow \quad a_0 = b_0; \quad a_1 = b_1 - b_0p; \quad a_2 = b_2 - b_1p; \quad a_3 = R - b_2p$

$\Rightarrow \quad b_0 = a_0; \quad b_1 = a_1 + b_0p; \quad b_2 = a_2 + b_1p; \quad R = a_3 + b_2p$

Satz

> Division von $P_n(x) = a_0x^n + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ durch $x - p$ ergibt reduziertes Polynom
>
> $P_{n-1}(x) = b_0x^{n-1} + \ldots b_{n-1}$ mit $\boxed{b_0 = a_0 \qquad b_k = a_k + b_{k-1}p \qquad R = a_n + b_{n-1}p}$ $(k = 1, \ldots n-1)$
>
> Es gibt dann $\boxed{P_n(x) = P_{n-1}(x)\cdot(x - p) + P_n(p)}$
>
> Ist p Nullstelle von $P_n(x)$, so gilt $\boxed{P_n(x) = P_{n-1}(x)\cdot(x - p)}$

4.3 Honer-Schema

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\
+ & 0 & b_0p & b_1p & \ldots & b_{n-1}p \\
\hline
p & b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & \boxed{R = P_n(p)}
\end{array}
$$

Bsp1: $(2x^3 - 3x^2 + x + 5) : (x - 2) = ?$

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & -3 & 1 & 5 \\
 & 0 & 4 & 2 & 6 \\
\hline
2 & 2 & 1 & 3 & 11
\end{array}
\qquad
\frac{2x^3 - 3x^2 + x + 5}{x-2} = 2x^2 + x + 3 + \frac{11}{x-2}
$$

Bsp2: Man berechne $P_4(x) = 3x^4 - 3x^2 + x - 1$ an der Stelle $x = 4$.

	3	0	−3	1	−1
	0	12	48	180	724
4	3	12	45	181	723

Bsp3: Man bestimme alle Lösungen von $P_3(x) = x^3 - 7x^2 + 9x + 5 = 0$.

Lsg: Bestimmen einer Lösung durch Erraten:

$$\underbrace{x\left(x^2 - 7x + 9\right)}_{\text{ganze Zahl}} = -5 \qquad \frac{-5}{x} \in \mathbb{Z} \text{ falls } x \in \mathbb{Z}$$

$$P_3(1) \neq 0; \quad P_3(-1) \neq 0; \quad P_3(5) = 125 - 175 + 45 + 5 = 0$$

Polynomdivision: $\left(x^3 - 7x^2 + 9x + 5\right) : (x - 5) = ?$

	1	−7	9	5
	0	5	10	−5
5	1	−2	−1	0

$$x^3 - 7x^2 + 9x + 5 = (x - 5)\left(x^2 - 2x - 1\right)$$

Lösungen von $x^2 - 2x - 1$: $\quad x_{2/3} = 1 \pm \sqrt{2}$

Lösungen von $x^3 - 7x^2 + 9x + 5$: $\quad x_1 = 5; \quad x_{2/3} = 1 \pm \sqrt{2}$

4.4 Das erweiterte Honer-Schema

gegeben: $P_n(x) = a_0 x^n + \ldots a_{n-1} x + a_n$

	a_0 …	a_1	a_2	…			a_n	
p	b_0 …	b_1	b_2	…		b_{n-1}	$\boxed{P_n(p)}$	
p	c_0 …	c_1	c_2	…	c_{n-2}	$\boxed{P_{n-1}(p) = P_n'(p)}$		$P_{n-1}(x) = b_0 x^{n-1} + \ldots b_{n-1}$
p	d_0 …	d_1	d_2	…	d_{n-3}	$\boxed{P_{n-2}(p) = \frac{1}{2!} \cdot P_n''(p)}$		$P_{n-2}(x) = c_1 x^{n-2} + \ldots c_{n-2}$
$\vdots$								
p	$P_0(p) = \frac{1}{n!} \cdot P_n^{(n)}(p)$							$P_{n-k}(p) = \frac{1}{k!} \cdot P^{(k)}(p)$

Begründung

$$P_n(x) = (x-p) \cdot P_{n-1}(x) + P_n(p) = (x-p)\underbrace{\left\{(x-p) \cdot P_{n-2}(x) + P_{n-1}(p)\right\}}_{P_{n-1}(x)} + P_n(p)$$

$$= (x-p)^2 \cdot P_{n-2}(x) + (x-p) \cdot P_{n-1}(p) + P_n(p) = (x-p)^2 \underbrace{\left\{(x-p) \cdot P_{n-3}(x) + P_{n-2}(p)\right\}}_{P_{n-2}(p)} + (x-p) \cdot P_{n-1}(p) + P_n(p)$$

$$= (x-p)^3 \cdot P_{n-3}(x) + (x-p)^2 \cdot P_{n-2}(p) + (x-p) \cdot P_{n-1}(p) + P_n(p)$$

$$= \ldots = P_0(p) \cdot (x-p)^n + P_1(p) \cdot (x-p)^{n-1} + \ldots P_n(p)$$

$$P_n(x) \underset{\substack{\text{Satz von} \\ \text{Taylor}}}{=} \frac{P_n^{(n)}(p)}{n!} \cdot (x-p)^n + \frac{P_n^{(n-1)}(p)}{(n-1)!} \cdot (x-p)^{n-1} + \ldots P_n(p) = \text{Taylorreihe}$$

Bsp: $P(x) = 2x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 2 \qquad p = -1$

	2	-1	-2	3	-2	
	0	-2	3	-1	-2	
-1	2	-3	1	2	-4	$= P(-1)$
	0	-2	5	-6		
-1	2	-5	6	-4	$= P'(-1)$	
	0	-2	7			
-1	2	-7	13	$= \frac{1}{2} \cdot P''(-1)$		
	0	-2				
-1	2	-9	$= \frac{1}{3!} \cdot P'''(-1)$			
	0					
-1	2	$= \frac{1}{4!} \cdot P^{(4)}(-1)$				

Taylorreihe von $P(x)$ um $p = -1$

$$P(x) = P(-1) + \frac{P'(-1)}{1!}(x+1) + \ldots \frac{P^{(4)}(-1)}{4!}(x+1)^4 = -4 - 4(x+1) + 13(x+1)^2 - 9(x+1)^3 + 2(x+1)^4$$

4.5 Berechnung einfacher Nullstellen von Polynomen nach dem Newton-Verfahren

Def.

s einfache Nullstelle von $P_n(x) \Leftrightarrow P_n(s) = 0$ und $P_n'(s) \neq 0$
$\Leftrightarrow P_n(x) = (x-s) \cdot P_{n-1}(x)$ und $P_{n-1}(s) \neq 0$

Beachte: $P_n'(s) = P_{n-1}(s)$

Bemerkung:
Eine einfache Nullstelle s von $P_n(x)$ lässt sich nach dem Newton-Verfahren bestimmen durch

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{P_n(x_k)}{P_n'(x_k)}}$$

$P_n'(x_k)$: Berechnung mit erweiterten Honer-Schema

Newton-Verfahren mit erweitertem Honer-Schema

Bsp: Man berechne die Näherung $x_0 = 0{,}95$ einer Nullstelle von $P_3(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ durch einen Newton-Schritt (exakte Lösung: $x = 1$)

	1	-1	-4	4	
	0	-0,95	-0,0475	-3,845	
0,95	1	-0,05	-4,0475	0,155	$= P_3(x_0)$
	0	0,95	0,855		
0,95	1	0,9	-3,193	$= P_3'(x_0)$	

Verbesserte Näherung: $x_1 = 0{,}95 - \frac{0{,}155}{-3{,}193} = 0{,}999$

II LÖSUNG LINEARER GLEICHUNGSSYSTEME

1 Der Algorithmus von Gauß

1.1 Lineares Gleichungssystem (LGS)

$$\boxed{\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= c_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n &= c_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &= c_m \end{aligned}}$$

LGS mit m Gleichungen
in den Unbekannten $x_1, \ldots x_n$
$\left(\text{Numerik: } m = n\right)$

Matrixform

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A \cdot \vec{x} = \vec{c}$$

$A =$ Koeffizientenmatrix
$\vec{x} =$ Lösungsvektor
$\vec{c} =$ Zielvektor

Erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left(A \mid \vec{c}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & c_m \end{array}\right)$$

Beispiel:

Komponentenschreibweise:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 2x_2 + 8x_3 &= 1 \\ 5x_1 + 7x_2 + 3x_3 &= 3 \end{aligned} \quad \hat{=}$$

Matrixform:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 8 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \hat{=} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 1 \\ 5 & 7 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

1.2 Lösbarkeit LGS'e

Sei $A\vec{x} = \vec{c}$ LGS, wobei A quadratische Matrix ist

$$\boxed{\begin{array}{ll} \det A \neq 0 \quad \Rightarrow & A\vec{x} = \vec{c} \text{ eindeutig lösbar} \\ \det A = 0 \quad \Rightarrow & \begin{cases} A\vec{x} = \vec{c} \text{ unlösbar} \\ \text{es existieren } \infty \text{ viele Lösungen} \end{cases} \end{array}}$$

In der Numerik stets vorausgesetzt: $\boxed{A \text{ quadratisch mit } \det A \neq 0}$

$\Rightarrow$ es existiert genau ein x_0 mit $A\vec{x}_0 = \vec{c}$ $\quad$ $\left(x_0 \text{ ist numerisch zu bestimmen}\right)$

1.3 Rückwärtseinsetzen

Folgende LGS'e können durch Rückwärtseinsetzen gelöst werden

$$\begin{pmatrix} r_{11} & \ldots & r_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & r_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{c} \end{pmatrix}$$

| rechte (obere) Dreiecksmatrix

Voraussetzung: R regulär, d.h. $\det R = r_{11} \ldots r_{nn} \neq 0$

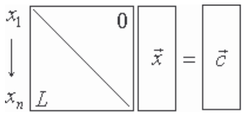
$\left(\Rightarrow \text{ Lösung } \vec{x} \text{ eindeutig bestimmt}\right)$

Bsp: GLS:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 0x_3 &= 6 \\ -\ x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Lsg: $x_3 = 3, \quad x_2 = 2, \quad x_1 = 1$

Bemerkung:
Ein LGS $L\vec{x} = \vec{c}$ mit einer regulären linken Dreieckmatrix L ist lösbar durch Vorwärtseinsetzen.



1.4 Gauß'sche Algorithmus (Gauß'sches Eleminationsverfahren)

Def.

> Zulässige Zeilenumformungen sind:
> (1) Verteuschen zweier Zahlen
> (2) Multiplikation einer Zahl mit einer Zahl $\neq 0$
> (3) Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Satz

> Zulässige Zeilenumformungen verändern nicht die Lösungsmenge

Verfahren von Gauß:

$$\boxed{A\vec{x} = \vec{b}} \xrightarrow[\text{zulässige Zeilenumformung}]{\textit{GAUSS-VERFAHREN}} \underset{R\text{: rechte Dreiecksmatrix}}{\boxed{R\vec{x} = \vec{c}}} \xrightarrow{\textit{RÜCKWÄRTS-EINSETZEN}} \boxed{\text{Lösung } \vec{x}}$$

Bsp:

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(A\middle|\vec{b}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 8 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \underset{\substack{\text{2.Zeile}=2\cdot(\text{1.Zeile}) \\ \text{3.Zeile}=(-2)\cdot(\text{1.Zeile})}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 8 & 3 & 2 \\ 0 & 20 & 5 & 5 \\ 0 & -15 & -4 & -5 \end{array}\right) \underset{\text{3.Zeile}=\frac{15}{20}(\text{2.Zeile})}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 8 & 3 & 2 \\ 0 & 20 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{-5}{4} \end{array}\right)$$

$$\hat{=} \quad \begin{aligned} x_1 + 8x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 20x_2 + 5x_3 &= 5 \\ -\frac{x_3}{4} &= -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

Lösen durch Rückwärtseinsetzen: $x_3 = 5, \quad x_2 = -1, \quad x_1 = 5$

1.5 Gauß-Algorithmus mit Pivotisierung

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & c_n \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{(2.\text{Zeile})+=(1.\text{Zeile})\cdot\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right) \\ \vdots \\ (n.\text{Zeile})+=(1.\text{Zeile})\cdot\left(-\frac{a_{n1}}{a_{11}}\right)}]{a_{11}\neq 0} \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{22} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ 0 & \boxed{a_{22}\,*} & \dots & a_{2n}\,* & c_2\,* \\ & \vdots & & & \\ \vdots & a_{r2}\,* & & \vdots & \vdots \\ & \vdots & & & \\ 0 & \boxed{a_{n2}\,*} & \dots & a_{nn}\,* & c_n\,* \end{array}\right)$$

$a_{r2}*$: Pivot

mindestens ein $a_{j2}* \neq 0$
da A regulär

$$\max_{2\leq j\leq n} |a_{j2}*| = |a_{r2}*| \neq 0$$

Gauß'sche Algorithmus mit Pivotsuche

gegeben $\left(A\,|\,\vec{b}\right)$ $n\times(n+1)$-Matrix, A regulär $\left(\det A \neq 0\right)$

gesucht: $\left(A\,|\,\vec{b}\right) \triangleq \left(R\,|\,\vec{c}\right)$ mit rechter Dreiecksmatrix R

1. Für $k = 1, 2, \ldots n-1$ (Spaltenindex)
2. suche a_{rj} $(r \geq j)$ mit $|a_{rj}| = \max_{i\geq j} |a_{ij}|$
3. tausche Zeile r mit Zeile j
4. für $i = j+1, \ldots n$ (Zeilenindex)
5. addiere das $\left(-\dfrac{a_{ij}}{a_{jj}}\right)$-fache der Zeile j in $\left(A\,|\,\vec{b}\right)$ zu Zeile i

$$\begin{pmatrix} \\ \boxed{\begin{matrix} a_{jj} \\ \vdots \\ a_{rj} \\ \vdots \end{matrix}} \end{pmatrix} \qquad a_{jj}: \text{ Pivot}$$

Bsp:

$$\left(A\,|\,\vec{b}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{vertausche 1. und 2.Zeile}]{\text{Pivot: 2.Zeile, 1.Spalte}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[(3.\text{Zeile})+=(1.\text{Zeile})\cdot(-1)]{(2.\text{Zeile})+=(1.\text{Zeile})\cdot(-0,5)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{vertausche 2. und 3.Zeile}]{\text{Pivot: 3.Zeile, 2.Spalte}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

2 Das Austauschverfahren

2.1 Austauschverfahren von Stiefel

Sei A regulär

$$\boxed{A\vec{x} = \vec{y}} \xrightarrow[\text{Austauschalgorithmus}]{\text{Auflösen nach } \vec{x}} \underset{B\vec{y}=\text{Lsg von } A\vec{x}=\vec{y}}{\boxed{\vec{x} = B\vec{y}}}$$

Es gilt dann $\boxed{B = A^{-1}}$ $\quad \left(A \cdot A^{-1} = E\right)$

Bew: $B \cdot A \cdot \vec{x} = B\vec{y} = \vec{x} = E\vec{x}$ für alle $\vec{x} \quad \Rightarrow \quad BA = E \quad \Rightarrow \quad B = A^{-1}$

2.2 Variablentausch $n = 3$

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

	x_1	x_2	x_3
$y_1 =$	a_{11}	a_{21}	a_{31}
$y_2 =$	a_{21}	a_{22}	a_{32}
$y_3 =$	a_{31}	a_{23}	a_{33}

Vertauschung der Variablen x_2 und y_3:

Auflösung der 3. Gleichung nach x_2

$$x_2 = -\frac{a_{31}}{a_{32}}x_1 + \frac{1}{a_{32}}y_3 - \frac{a_{33}}{a_{32}}x_3$$

Einsetzen in die 1. und 2. Gleichung

$$y_1 = \left(a_{11} - a_{12}\frac{a_{31}}{a_{32}}\right)x_1 + \frac{a_{12}}{a_{32}}y_3 + \left(a_{13} - a_{12}\frac{a_{33}}{a_{32}}\right)x_3$$

$$y_2 = \left(a_{21} - a_{22}\frac{a_{31}}{a_{32}}\right)x_1 + \frac{a_{22}}{a_{32}}y_3 + \left(a_{23} - a_{22}\frac{a_{33}}{a_{32}}\right)x_3$$

$\Rightarrow$

	x_1	y_3	x_3
$y_1 =$	$a_{11} - a_{12}\frac{a_{31}}{a_{32}}$	$\frac{a_{12}}{a_{32}}$	$a_{13} - a_{12}\frac{a_{33}}{a_{32}}$
$y_2 =$	$a_{21} - a_{22}\frac{a_{31}}{a_{32}}$	$\frac{a_{22}}{a_{32}}$	$a_{23} - a_{22}\frac{a_{33}}{a_{32}}$
$x_2 =$	$-\frac{a_{31}}{a_{32}}x_1$	$\frac{1}{a_{32}}$	$-\frac{a_{33}}{a_{32}}$

2.3 Vorbereitung beim Austausch x_2 mit y_3

	x_1	x_2	x_3
$y_1 =$	a_{11}	a_{12}	a_{13}
$y_2 =$	a_{21}	a_{22}	a_{23}
$y_3 =$	a_{31}	a_{32}	a_{33}
	$-\frac{a_{31}}{a_{32}}$	.	$-\frac{a_{33}}{a_{32}}$

< - Kellerzeile

$x_2 =$ Pivotspalte
$y_3 =$ Pivotzeile
$a_{32} =$ Pivot

1. ersetze Pivotelement p durch p^{-1}
2. die übrigen Elemente der Pivotspalten werden mit p^{-1} multipliziert
3. die übrigen Elemente der Pivotzeilen werden aus der Kellerzeile übernommen
4. zu den übrigen Elementen wird das Produkt aus dem gleichzeiligem Element der Pivotspalte und dem gleichspaltigen Element der Kellerzeile addiert

Bsp:

$$\begin{array}{r|ccc|} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline y_1 = & \boxed{2} & 2 & 0 \\ y_2 = & 1 & 1 & 2 \\ y_3 = & 2 & 1 & 1 \\ \hline & \cdot & -1 & 0 \end{array} \quad \xrightarrow[x_1 \leftrightarrow y_1]{\text{Austausch}} \quad \begin{array}{r|ccc} & y_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 = & 0,5 & -1 & 0 \\ y_2 = & 0,5 & 0 & 2 \\ y_3 = & 1 & -1 & 1 \end{array}$$

2.4 Austauschverfahren r, s

gegeben: $A \quad n \times m -$ Matrix $\left(A \text{ nicht notwendig quadratisch}\right) \qquad a_{rs} \neq 0$
gesucht: A nach Variablentausch y_r gegen x_s

$$\begin{array}{r|ccccc|} & & x_k & & x_s & \\ \hline & & \vdots & & \vdots & \\ y_i = & & a_{ik} & & a_{is} & \cdots \\ & & & & \vdots & \\ y_r = & \cdots & a_{rk} & \cdots & a_{rs} & \cdots \\ & & \vdots & & \vdots & \\ \hline & & -\dfrac{a_{rk}}{a_{rs}} & \cdots & & \end{array}$$

Allgemein $\left(i = \text{Zeilenindex},\ k = \text{Spaltenindex}\right)$

1. für $i = 1, \dots n \quad i \neq r$ $\qquad \left[i\text{-te Zeile} \neq \text{Pivotzeile } r\right]$
2. für $k = 1, \dots n \quad k \neq s$ $\qquad \left[k\text{-te Spalte} \neq \text{Pivotspalte } s\right]$
3. bestimme $\boxed{a_{ik} := a_{ik} - a_{is} \dfrac{a_{rk}}{a_{rs}}}$

a_{is}: gleichzeiliges Element der Pivotspalte
$\frac{a_{rk}}{a_{rs}}$: gleichspaltiges Element der Kellerzeile

Pivotzeile

4. für $k = 1, \dots n \quad k \neq s$
5. bestimme $\boxed{a_{rk} := -\dfrac{a_{rk}}{a_{rs}}}$ $\leftarrow$ Kellerzeile

Pivotspalte

6. für $i = 1, \dots n \quad i \neq r$
7. bestimme $\boxed{a_{is} := \dfrac{a_{is}}{a_{rs}}}$

Pivot

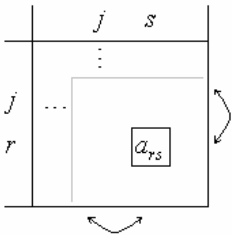
8. setze $\boxed{a_{rs} := \dfrac{1}{a_{rs}}}$

2.5 Matrixinversion durch Austausch

$$\underset{A\text{: regulär } (\det A\neq 0)}{\boxed{A\vec{x}=\vec{y}}} \xrightarrow[y_k \text{ mit } x_k]{\text{Austausch aller}} \underset{B=A^{-1} \text{ (vgl. 2.1)}}{\boxed{\vec{x}=B\vec{y}}}$$

Matrixinversion mit Pivotsuche

gegeben: reguläre $n\times n$-Matrix
gesucht: Inverse A^{-1}



a_{rs} : soll betrags-größtes Element sein

1. für $j=1,2,\ldots n$ $\left(j \text{ Spaltenindex}\right)$
2. suche a_{rs} $\left(r,\, s\leq j\right)$ mit $|a_{rs}|=\max\limits_{i,k\geq j}|a_{ik}|$
3. tausche in A die Zeilen j und r, und die Spalte j und r
4. führe Austauschverfahren $j,\, j$ durch
5. ordne Zeilen und Spalten in natürliche Weise

Bsp1: Man bestimme die Inverse zu $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ($\square$-markiert: Pivot)

$$\begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline y_1 = & \boxed{2} & 2 & 0 \\ y_2 = & 1 & 1 & 2 \\ y_3 = & 2 & 1 & 1 \end{array} \xrightarrow[\substack{x_1\leftrightarrow y_1 \\ \text{(vgl. 2.3)}}]{\text{Austausch}} \begin{array}{c|ccc} & y_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & 0,5 & -1 & 0 \\ y_2 & 0,5 & 0 & 2 \\ y_3 & 1 & -1 & 1 \end{array} \xrightarrow[\text{Spalte 2 u. 3}]{\text{vertausche}} \begin{array}{c|ccc} & y_1 & x_3 & x_2 \\ \hline x_1 & 0,5 & 0 & -1 \\ y_2 & 0,5 & \boxed{2} & 0 \\ y_3 & 1 & 1 & -1 \\ \hline & -0,25 & \cdot & 0 \end{array} \xrightarrow[x_3\leftrightarrow y_2]{\text{Austausch}}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & y_1 & y_2 & x_2 \\ \hline x_1 & 0,5 & 0 & -1 \\ x_3 & -0,25 & 0,5 & 0 \\ y_3 & 0,75 & 0,5 & \boxed{-1} \\ \hline & 0,75 & 0,5 & \cdot \end{array} \xrightarrow[x_2\leftrightarrow y_3]{\text{Austausch}} \begin{array}{c|ccc} & y_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & -0,25 & -0,5 & 1 \\ x_3 & -0,25 & 0,5 & 0 \\ x_2 & 0,75 & 0,5 & -1 \end{array} \Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} -0,25 & -0,5 & 1 \\ 0,75 & 0,5 & -1 \\ -0,25 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

Probe: $A\cdot A^{-1}=E$

Bsp2: Man löse das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lsg: $\vec{x}=A^{-1}\cdot\vec{c}$

$$\begin{pmatrix} -0,25 & -0,5 & 1 \\ 0,75 & 0,5 & -1 \\ -0,25 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,75 \\ 0,75 \\ -0,25 \end{pmatrix}$$

3 Iterative Methoden zur Lösung linearer Gleichungssysteme

3.1 Das Gesamtschrittverfahren von Jacobi

gegeben:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
\qquad
A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}
$$

regulär mit $a_{ii} \neq 0,\ i=1,\ldots n$
(regulär: evtl umordnen)

$\downarrow$ auflösen nach x_i

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - \ldots a_{1n}x_n\right) \\
x_2 &= \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1 - \ldots a_{2n}x_n\right) \\
&\vdots \\
x_n &= \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1 - \ldots a_{n,n-1}x_{n-1}\right)
\end{aligned}
$$

bzw: $\boxed{x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{k=1 \\ i\neq k}}^{n} a_{ik}x_k\right), \quad i=1,\ldots n}$

Beim Gesamtschrittverfahren wird eine Folge iterierter Vektoren gebildet nach der Iterationsvorschrift

$$
\vec{x}^{(m+1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(m+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(m+1)} \end{pmatrix} \qquad \text{mit } x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{k=1 \\ i\neq k}}^{n} a_{ik}x_k^{(m)}\right), \quad i=1,\ldots n
$$

Als Startvektor wählt man in der Regel $\vec{x}^{(0)} = \vec{0}$

3.2 Beispiel

$$
\begin{aligned}
5x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\
x_1 + 5x_2 &= 2 \\
x_1 + 5x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

Iterationsvorschrift

$$
\begin{aligned}
x_1^{(m+1)} &= \frac{1}{5}\left(1 - x_2^{(m)} - x_3^{(m)}\right) \\
x_2^{(m+1)} &= \frac{1}{5}\left(2 - x_1^{(m)}\right) \\
x_3^{(m+1)} &= \frac{1}{5}\left(0 - x_1^{(m)}\right)
\end{aligned}
\qquad
\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

m	$x_1^{(m)}$	$x_2^{(m)}$	$x_3^{(m)}$
0	0	0	0
1	0,2000	0,4000	0
2	0,1200	0,3600	–0,0400
3	0,1360	0,3760	–0,0240
4	0,1296	0,3728	–0,0272
5	0,1309	0,3741	–0,0259

exakte Lösung

$$
\vec{x} = \begin{pmatrix} 0,1304 \\ 0,3739 \\ -0,0261 \end{pmatrix}
$$

3.3 Das Einzelverfahren von Gauß-Seidel

$$
\begin{aligned}
x_1^{\text{neu}} &= \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{\text{alt}} - a_{13}x_3^{\text{alt}} - \ldots a_{1n}x_n^{\text{alt}}\right)\\
x_2^{\text{neu}} &= \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{\text{neu}} - a_{23}x_3^{\text{alt}} - \ldots a_{2n}x_n^{\text{alt}}\right)\\
x_3^{\text{neu}} &= \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{\text{neu}} - a_{32}x_2^{\text{neu}} - \ldots a_{3n}x_n^{\text{alt}}\right)\\
&\vdots\\
x_i^{\text{neu}} &= \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \left(\sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}x_k^{\text{neu}} + \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}x_k^{\text{alt}}\right)\right)\\
&\vdots\\
x_n &= \frac{1}{a_{nn}}(\ldots)
\end{aligned}
$$

Beim Einzelschrittverfahren wird eine Folge iterierter Vektoren gebildet nach der Iterationsvorschrift

$$
\vec{x}^{(m+1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(m+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(m+1)} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}x_k^{(m+1)} + \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}x_k^{(m)}\right) \qquad \begin{aligned} x_k^{(m+1)} &\mathrel{\hat{=}} \text{neu} \\ x_k^{(m)} &\mathrel{\hat{=}} \text{alt} \end{aligned}
$$

Als Startvektor wählt man in der Regel $\vec{x}^{(0)} = \vec{0}$

3.4 Beispiel

$$
\begin{aligned}
5x_1 + x_2 + x_3 &= 1\\
x_1 + 5x_2 &= 2\\
x_1 + 5x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

Iterationsvorschrift

$$
\begin{aligned}
x_1^{(m+1)} &= \frac{1}{5}\left(1 - x_2^{(m)} - x_3^{(m)}\right)\\
x_2^{(m+1)} &= \frac{1}{5}\left(2 - x_1^{(m+1)} - 0\cdot x_3^{(m)}\right) \qquad \vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\
x_3^{(m+1)} &= \frac{1}{5}\left(0 - x_1^{(m+1)} - 0\cdot x_2^{(m+1)}\right)
\end{aligned}
$$

m	$x_1^{(m)}$	$x_2^{(m)}$	$x_3^{(m)}$	
0	0	0	0	
1	0,2000	0,3600	−0,0400	
2	0,1360	0,3726	−0,0272	
3	0,1309	0,3738	−0,0261	
4	0,1304	0,3739	−0,0261	
5	0,1304	0,3739	−0,0261	← exakte Lösung
5	0,1309	0,3741	−0,0259	← Gesamtschrittverfahren

Bemerkung:
Einzelschrittverfahren konvergiert im Allgemeinen besser als das Gesamtschrittverfahren

3.5 Konvergenzkriterium für Gesamt- und Einzelschrittverfahren

Satz: Das Gesamt- und Einzelschrittverfahren konvergiert, wenn folgende Zeilensummenkriterien erfüllt sind.

$$\boxed{\sum_{\substack{k=1\\ i\neq k}}^{n} |a_{ik}| < |a_{ii}| \quad {}_{i=1,\ldots,n}} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & & \\ \cdots & a_{22} & \cdots & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{diagonaldominant!}$$

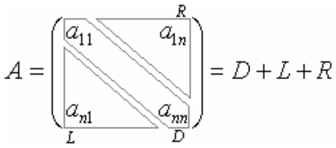
a_{ii} :Diagonalelemente
a_{ik} :Betragssumme der Nichtdiagonalelemente

Eventuell Zeilenumformung erforderlich!

Bsp:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{tausche 1.Zeile mit 2.Zeile}} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Beweisskizze:



$$A\vec{x} = \vec{b} \;\Rightarrow\; (D+L+R)\vec{x} = \vec{b} \;\Rightarrow\; D\vec{x} = -(L+R)\vec{x} + \vec{b} \;\Rightarrow\; \vec{x} = \underbrace{D^{-1}\left(-(L+R)\right)}_{T}\vec{x} + \underbrace{D^{-1}\vec{b}}_{\vec{c}} \;\Rightarrow\; \vec{x} = T\vec{x} + \vec{c}$$

Iterartionsfolge (Gesamtschrittverfahren):

$\boxed{\vec{x}^{(k+1)} = T\,\vec{x}^{(k)} + \vec{c}}$ $\quad \vec{x}^{(0)}$ Startvektor

Matrixnorm $\|T\| = \max\limits_{|\vec{x}|\leq 1} |T\,\vec{x}|$

$\|T\| < 1,$ wenn Zeilensummenkriterium erfüllt ist

Es gilt: $$|\underset{\substack{\uparrow\\ A\vec{x}=\vec{b}}}{\vec{x}} - \vec{x}^{(k)}| \leq \underbrace{\frac{\|T\|^k}{1-\|T\|}}_{\substack{\downarrow\\ 0}\;\; k\to\infty,\ \text{da } \|T\|<1} |\vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(0)}|$$

3.6 Mögliche Abbruchbedingung beim Gesamt- bzw Einzelschrittverfahren

Abbruchbedingung: $$\underbrace{\frac{\left\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^{(k-1)}\right\|_\infty}{\left\|\vec{x}^{(k)}\right\|_\infty}}_{\text{rel. Fehler zwischen } \vec{x}^{(k)} \text{ und } \vec{x}^{(k-1)}} < \varepsilon$$

$$\|\vec{a}\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |a_i| \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Bsp: $\left\|(1,4,-4)\right\|_\infty = \max\{|1|,|4|,|-5|\} = 5$

$\left\|(e,\pi,-15,0,1)\right\|_\infty = 15$

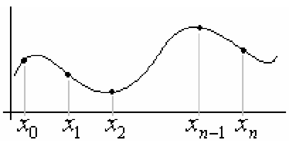
3.7 Verfahren zur Lösung von LGS'en

Methode	Bemerkung
Gauß-Algorithmus	Rundungsfehler, relativ leicht programmierbar (Pivotsuche!), nicht sinnvoll für große LGSe $(n \leq 10)$
Austauschverfahren	Rundungsfehler, Mitberechnung der Inverse, (empfehlenswert, falls Berechnung für verschiedene Zielvektoren), nicht sinnvoll für große n
Cramersche Regel	übermäßiger Rechenaufwand für $n > 3$, (Berechnung der Determinante), sehr empfehlenswert für $n = 2$
Gesamtschrittverfahren	sehr hohe Genauigkeit, unter Umständen keine Konvergenz, (falls nicht diagonaldominant), sehr leicht programmierbar, sinnvoll für große LGSe
Einzelschrittverfahren	sehr hohe Genauigkeit, unter Umständen keine Konvergenz, (falls nicht diagonaldominant), sehr leicht programmierbar, sinnvoll für große LGSe

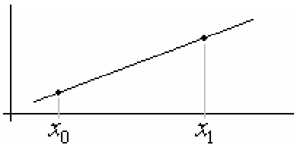
III INTERPOLATION

1 Grundbegriffe

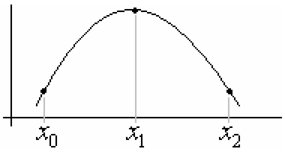
1.1 Einführung



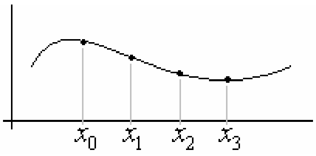
$P_n(x) = c_0 + c_1 x^1 + \ldots c_n x^n$



lineare Interpolation

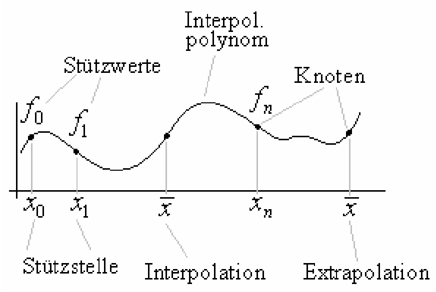


quadratische Interpol.



kubische Interpolation

1.2 Definition



Wertetabelle

x_i	x_0	x_1	$\ldots$	x_n
f_i	f_0	f_1	$\ldots$	f_n

$$P(\bar{x}) \left\{ \begin{array}{l} \text{innerhalb} = \text{Interpolation} \\ \text{außerhalb} = \text{Extrapolation} \end{array} \right\}$$

Def: Die Stützstellen heißen äquidistant, wenn $x_{i+1} - x_i = h$ für alle $i = 0, \ldots n-1$ d.h. $x_i = x_0 + i\,h$

Felstlegung: $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$

1.3 Satz

Zu $n+1$ verschiedene Stützstellen $x_0, \ldots x_n$ mit den Stützwerten $f_0, \ldots f_n$
gibt es genau ein Polynom $P(x)$ höchstens vom Grad n mit

$\boxed{P(x_i) = f_i}$ für $i = 0, \ldots n$

Bew: Ansatz: $P_n(x) = c_0 + c_1 x^1 + \ldots c_n x^n$

Bestimmung der $c_0, \ldots c_n$ durch folgendes LGS

$$\begin{array}{l} P(x_0) = c_0 + \ldots c_n x_0^{\,n} = f_0 \\ P(x_1) = c_0 + \ldots c_n x_1^{\,n} = f_1 \\ P(x_n) = c_0 + \ldots c_n x_n^{\,n} = f_n \end{array} \quad \hat{=} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^{\,n} \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^{\,n} \end{pmatrix}}_{\text{Vandermondsche Matrix}} \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^{\,n} \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^{\,n} \end{vmatrix} = \prod_{\substack{i>k \\ i,k=0,\ldots n}} (x_i - x_k)$$

$$\begin{aligned} = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)\ldots(x_n - x_0) \\ (x_2 - x_1)\ldots(x_n - x_1) \\ \ddots \quad \vdots \\ (x_n - x_1) \neq 0 \quad (x_i \neq x_k, \quad i \neq k) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Matrix regulär $\Rightarrow$ $c_0, \ldots c_n$ eindeutig bestimmt

2 Lagrange – Interpolation

2.1 Lagrange – Polynome

Sei $x_0, x_1, \dots x_n$ Stützstellen. Nach 1.2 existieren eindeutig bestimmte $(n+1)$ Polynome $L_i(x)$ vom Grad n mit

x_k	x_0	x_1	$\dots$	x_i	$\dots$	x_n
$L_i(x_k)$	0	0	$\dots$	1	0	0

$L_i(x_k)$ heißt dann Lagrange - Polynom

Die Lagrange – Polynome sind gegeben durch

$$\boxed{L_i(x_k) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}}$$

Hängt nur von den Stützstellen ab!

Bew: $L_i(x_k) = 0$ für $i \neq k$, $L_i(x_i) = 1$

2.2 Beispiel

Man bestimme die Lagrange – Polynome für die Stützstellen $x_0 = 1, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 6$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-3)(x-6)}{(1-3)(1-6)} = \frac{1}{10}(x-3)(x-6)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-1)(x-6)}{(3-1)(3-6)} = \frac{1}{6}(x-1)(x-6)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-1)(x-3)}{(6-1)(6-3)} = \frac{1}{15}(x-1)(x-3)$$

2.3 Interpolation von Lagrange

gegeben sei die Wertetabelle

x_i	x_0	x_1	$\dots$	x_n
f_i	f_0	f_1	$\dots$	f_n

und seien $L_i(x) \quad (i = 0, \dots n)$ die zugehörigen Lagrange - Polynome

Die Funktion

$$\boxed{P(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + \dots f_n L_n(x)}$$

ist ein Polynom höchstens vom Grad n mit $\underbrace{\boxed{P(x_k) = f_k}}_{k=0,\dots n}$

Bew: $P(x_k) = \sum_{i=0}^{n} f_i \underbrace{L_i(x_k)}_{=\begin{cases}0, & i\neq k\\ 1, & i=k\end{cases}} = f_k \qquad , k = 0, \dots n$

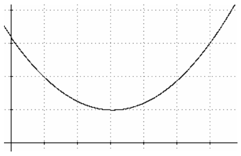
2.4 Beispiele

(1) Man bestimme zu

x_i	1	3	6
f_i	2	1	3

das Lagrange – Interpolationspolynom

Lsg:



$$P(x) = 2L_0(x) + 1L_1(x) + 3L_3(x)$$

$$\overset{2.2}{=} 2\frac{1}{10}(x-3)(x-6) - \frac{1}{6}(x-1)(x-6) + 3\frac{1}{15}(x-1)(x-3) = \frac{7}{30}x^2 - \frac{43}{30}x + \frac{16}{5}$$

Probe: $P(1) = 2,\quad P(3) = 1,\quad P(6) = 3$

(2) Man extrapoliere die Tabelle

x_i	0	1	2	3
f_i	8	5	4	?

$$P(x) = 8L_0(x) + 5L_1(x) + 4L_2(x) = 8\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} + 5\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} + 4\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}$$

$$P(3) = 8\cdot\frac{2\cdot 1}{2} + 5\cdot\frac{3\cdot 1}{-1} + 4\cdot\frac{3\cdot 2}{2} = 5$$

3 Newton – Interpolation

3.1 Newton – Polynome

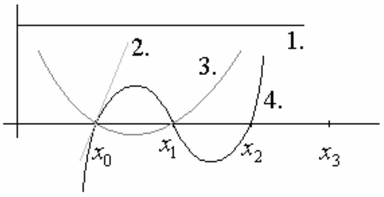
gegeben seien die Stützstellen $x_0, x_1, \ldots x_n$.
Die $n+1$ Polynome

$$\boxed{N_0(x) = 1}$$

und

$$\boxed{N_i(x) = (x - x_0)\ldots(x - x_{i-1})} \quad i = 1, \ldots n$$

vom Grad i heißen Newton-Polynom. Sie verschwinden an den ersten i Stützstellen



1. $N_0(x)$
2. $N_1(x) = (x - x_0)$
3. $N_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)$
4. $N_3(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$

3.2 Newton – Interpolation

Zu der Wertetabelle $\begin{array}{c|cccc} x_i & x_0 & x_1 & \ldots & x_n \\ \hline f_i & f_0 & f_1 & \ldots & f_n \end{array}$ ist ein Interpolationspolynom $P(x)$ gegeben durch

$$\boxed{P(x) = f_0\, N_0(x) + f_{0,1}\, N_1(x) + f_{0,1,2}\, N_2(x) + \ldots f_{0,1,\ldots n}\, N_n(x) = f_0 \cdot 1 + f_{0,1}(x - x_0) + \ldots f_{0,1,\ldots n}(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})} \qquad (*)$$

Die Koeffizienten $f_{0,\ldots i}$ heißen dividierte Differenzen und lassen sich durch die Rekursionsformel

$$\boxed{f_{i,\ldots k} = \frac{f_{i,\ldots k-1} - f_{i+1,\ldots k}}{x_1 - x_k}} \quad i < k$$

Newton-Formel

bestimmen.

Bsp: $f_{1,\ldots 5} = \dfrac{f_{1,\ldots 4} - f_{2,\ldots 5}}{x_1 - x_5}$ $\qquad f_{0,1} = \dfrac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1}$ $\qquad f_{1,2} = \dfrac{f_1 - f_2}{x_1 - x_2}$ $\qquad f_{0,1,2} = \dfrac{f_{0,1} - f_{1,2}}{x_0 - x_2}$ $\qquad f_{0,\ldots 3} = \dfrac{f_{0,1,2} - f_{1,2,3}}{x_0 - x_3}$

Bestimmung der $f_{0,\ldots i}$ mit Hilfe des Differenzenschemas (Schema von Newton)

	f_i	1.Stufe	2.Stufe	3.Stufe	$\ldots$	n.Stufe
x_0	f_0					
		$f_{0,1}$				
x_1	f_1		$f_{0,1,2}$			
		$f_{1,2}$		$f_{0,\ldots 3}$		
x_2	f_2		$f_{1,2,3}$			
		$f_{2,3}$			$\vdots$	$f_{0,1,\ldots n}$
x_3	f_3					
$\vdots$	$\vdots$			$f_{n-3,\ldots n}$		
x_{n-1}	f_{n-1}		$f_{n-2,n-1,n}$			
		$f_{n-1,n}$				
x_n	f_n					

obere Hauptdiagonale wird benötigt

Bsp:

x_i	f_i	1.St	2.St	3.St
0	1			
		0		
1	1		$1/2$	
		1		$-1/12$
2	2		$1/6$	
		$3/2$		
4	5			

1.Stufe: $0 = \dfrac{1-1}{0-1}$ $\qquad 1 = \dfrac{1-2}{1-2}$ $\qquad \dfrac{3}{2} = \dfrac{2-5}{2-4}$

2.Stufe: $\dfrac{1}{2} = \dfrac{0-1}{0-2}$ $\qquad \dfrac{1}{6} = \dfrac{1-2/3}{1-4}$

3.Stufe: $-\dfrac{1}{12} = \dfrac{1/2 - 1/6}{0-4}$

Beweisskizze von (*) (siehe 3.2 Newton-Interpolation / Formel)

Ansatz: $P(x) = f_0 + f_{0,1}(x - x_0) + f_{0,1,2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots$ mit $P(x_i) = f_i$

$$P(x_0) = f_0$$

$$f_1 = P(x_1) = f_0 + f_{0,1}(x_1 - x_0) \quad \Rightarrow \quad f_{0,1} = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1}$$

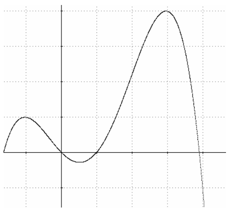
$$f_2 = P(x_2) = f_0 + \underbrace{f_{0,1}}_{\frac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1}}(x_2 - x_0) + f_{0,1,2}(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$ (alle weiteren Terme fallen weg $(\Rightarrow \quad x_2 - x_2)$)

$$\xrightarrow[f_{0,1,2}]{\text{Auflösen nach}} \quad f_{0,1,2} = \dots = \frac{\frac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1} - \frac{f_1 - f_2}{x_1 - x_2}}{x_0 - x_2} = \frac{f_{0,1} - f_{1,2}}{x_0 - x_2}$$

Vorteil des Newton Verfahren:
Bei Erweiterung der Wertetabelle keine Neuberechnung des Newton Polynoms erforderlich

3.3 Beispiel

x_i	-1	0	1	3	4
f_1	1	0	0	4	-1



Lsg: Newton-Schema

x_1	f_i	1.St	2.St	3.St	4.St
-1	1				
		-1			
0	0		$\frac{1}{2}$		
		0		$\frac{1}{24}$	
1	0		$\frac{2}{3}$		$-\frac{19}{120}$
		2		$-\frac{3}{4}$	
3	4		$-\frac{7}{3}$		
		-5			
4	-1				

$$P(x) = f_0 N_0(x) + f_{0,1} N_1(x) + f_{0,1,2} N_2(x) + f_{0,1,2,3} N_3(x) + f_{0,1,2,3,4} N_4(x)$$

$$= 1 - 1(x+1) + \frac{1}{2}(x+1)(x-0) + \frac{1}{24}(x+1)(x-0)(x-1) - \frac{19}{120}(x+1)(x-0)(x-1)(x-3)$$

$$= \underbrace{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4}_{\text{Normalform}} \quad , a_0, \dots a_4 = ?$$

3.4 Umwandlung der Newton-Form in die Normalform (exemplarisch für $n = 4$)

$$P(x) \underset{\substack{\text{Newton-}\\\text{form}}}{=} c_4(x-x_3)(x-x_2)(x-x_1)(x-x_0)+c_0(x-x_2)(x-x_1)(x-x_0)+c_2(x-x_1)(x-x_0)+c_1(x-x_0)+c_0$$

$$\rightarrow$$

$$P(x) \underset{\substack{\text{Normal-}\\\text{form}}}{=} a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$$

$$P(x)=\left\{\left[\left(c_4(x-x_3)+c_3\right)(x-x_2)+c_2\right](x-x_1)+c_1\right\}(x-x_0)+c_0$$

$$P(x)=-\frac{19}{120}(x+1)(x-0)(x-1)(x+3)+\frac{1}{24}(x+1)(x-0)(x+1)+\frac{1}{2}(x+1)(x-0)-1(x+1)+1$$

modifiziertes Honer Schema:

$c_4=-\frac{19}{120}$		$c_3=\frac{1}{24}$		$c_2=\frac{1}{2}$		$c_1=-1$		$c_0=1$
	$-x_3=-3$		$-x_2=-1$		$-x_1=0$		$-x_0=1$	
		$\frac{19}{40}$		$-\frac{31}{60}$		0		-1
$-\frac{19}{120}$		$\frac{31}{60}$		$-\frac{1}{60}$		-1		$0=a_0$
	-1		0		1			
		$\frac{19}{120}$		0		$-\frac{1}{60}$		
$-\frac{19}{120}$		$\frac{81}{120}$		$-\frac{1}{60}$		$-\frac{61}{60}=a_1$		
	0		1					
		0		$\frac{81}{120}$				
$-\frac{19}{120}$		$\frac{81}{120}$		$\frac{79}{120}=a_2$				
	1							
		$-\frac{19}{120}$						
$-\frac{19}{120}$		$\frac{31}{60}=a_3$						
$-\frac{19}{120}=a_4$								

$$P(x)=-\frac{61}{60}x+\frac{79}{120}x^2+\frac{31}{60}x^3-\frac{19}{120}x^4$$

Anwendung:

(1) In der ersten Zeile beginnend bei $c_4\cdot(-x_3)+c_3=2.$ Element in der 2. Zeile

(2) $(\text{Diese Element})\cdot(-x_2)+c_2=3.$ Element in der 2. Zeile

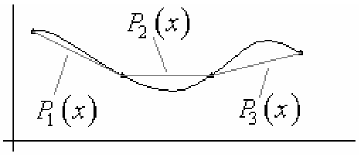
(3) fortsetzend bis Ende der Zeile

(4) Die x_i werden in der 2. Zeile um eine Position nach links verschoben

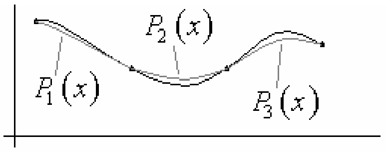
(5) Gleiches Schema bis Ende der Zeile und a_n in der letzten Zeile alleine steht

4 Spline – Interpolation

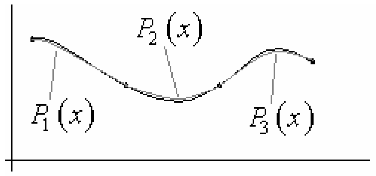
4.1 Einführung



lineare Spline-Interpolation



quadratische Spline-Interpola.



kubische Spline-Interpolation
(die am meisten verwendete Form)

4.2 Spline – Funktion

geg:

x_i	x_0	x_1	$\dots$	x_n
y_i	y_0	y_1	$\dots$	y_n

$, F(x):[x_0, x_n]$

Eine Funktion $F(x)$ in $[x_0, x_n]$ heißt $($kubische$)$ Splinefunktion, wenn:

(1) $F(x)$ ist in jedem Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$ $i = 0,\dots n-1$ ein Polynom 3. Grades, d.h.

$$\boxed{F(x) = P_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_2)^2 + d_i(x - x_i)^3 \quad \text{in } [x_i, x_{i+1}]}$$

(2) $F(x)$ erfüllt die Interpolationsbedingung $\boxed{F(x_i) = y_i}$

(3) $F(x)$ ist in $[x_0, x_n]$ zweimal stetig differenzierbar

Stetigkeit von $F(x)$: $\quad P_i(x_i) = P_{i-1}(x_i)$

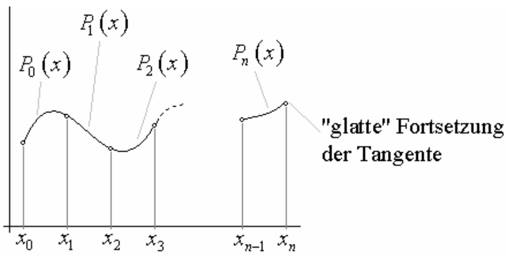
Stetigkeit von $F'(x)$: $\quad P_i'(x_i) = P_{i-1}'(x_i)$

Stetigkeit von $F''(x)$: $\quad P_i''(x_i) = P_{i-1}''(x_i)$

Anschlussbedingungen
$i = 1,\dots n-1$

(4) $F(x)$ heißt natürliche Spline-Funktion, wenn außerdem gilt:

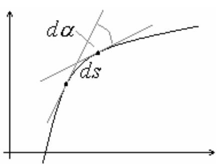
$\boxed{F''(x_0) = P_0''(x_0) = 0}$ und $\boxed{F''(x_n) = P_n''(x_n) = 0}$



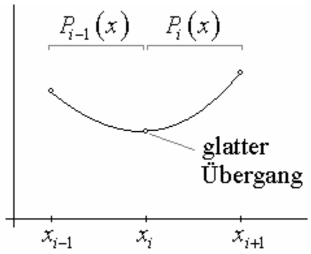
Krümmung einer Kurve:

Def: Krümmung

$$\kappa = \frac{d\alpha}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$$

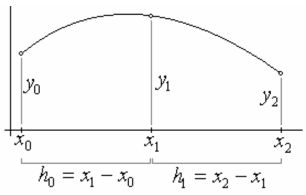


Satz: $$\kappa(x_0) = \frac{f''(x_0)}{\sqrt{\left(1 + \left(f'(x_0)\right)^2\right)^3}}$$



$$\kappa_i(x_i) \underset{\substack{\text{Krümmung}\\ \text{von } P_i(x)}}{=} \frac{P_i''(x_i)}{\sqrt{\left(1+\left(P_i'(x_i)\right)^2\right)^3}} = \frac{P_{i-1}''(x_i)}{\sqrt{\left(1+\left(P_{i-1}'(x_i)\right)^2\right)^3}} \underset{\substack{\text{Krümmung}\\ \text{von } P_{i-1}(x)}}{=} \kappa_{i-1}(x_i)$$

4.3 Bestimmung einer natürlichen kubischen Spline – Funktion (für $n = 2$)



gesucht:

$$F(x) = \begin{cases} P_0(x); & x_0 \le x < x_1 \\ P_1(x); & x_1 \le x < x_2 \end{cases} \quad \text{mit}$$

$$P_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3$$

$$P_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3$$

zu bestimmen:

$a_0,\ b_0,\ c_0,\ d_0,\ a_1,\ b_1,\ c_1,\ d_1$

Lösung:

$$P_0'(x) = b_0 + 2c_0(x - x_0) + 3d_0(x - x_0)^2$$

$$P_1'(x) = b_1 + 2c_1(x - x_1) + 3d_1(x - x_1)^2$$

$$P_0''(x) = 2c_0 + 6d_0(x - x_0)$$

$$P_1''(x) = 2c_1 + 6d_1(x - x_1)$$

Bedingung 4.1 (3) ergibt:

$$P_1(x_1) = P_0(x_1) \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_0 + b_0h_0 + c_0h_0^2 + d_0h_0^3 \qquad (1)$$

$$P_1'(x_1) = P_0'(x_1) \quad \Rightarrow \quad b_1 = b_0 + 2c_0h_0 + 3d_0h_0^3 \qquad (2)$$

$$P_1''(x_1) = P_0''(x_1) \quad \Rightarrow \quad 2c_1 = 2c_0 + 6d_0h_0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_0 + 3d_0h_0 \qquad (3)$$

Bedingung 4.1 (4) ergibt:

$$P_0''(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2c_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_0 = 0 \qquad (4)$$

$$P_1''(x_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2c_1 + 6d_1h_1 = 0 \qquad (5)$$

Bedingung 4.1 (2) ergibt:

$$F(x_0) = P_0(x_0) = y_0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = y_0 \qquad (6)$$

$$F(x_1) = P_1(x_1) = y_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = y_1 \qquad (7)$$

$$F(x_2) = P_1(x_2) = y_2 \quad \Rightarrow \quad a_1 + b_1h_1 + c_1h_1^2 + d_1h_1^3 = y_2 \qquad (8)$$

LGS der Spline-Funktion für $n = 2$

	a_0	b_0	c_0	d_0	a_1	b_1	c_1	d_1	
(1)	1	h_0	h_0^2	h_0^3	-1				0
(2)		1	$2h_0^2$	$3h_0^3$		-1			0
(3)			1	$3h_0$			-1		0
(4)			1						0
(5)							2	$6h_1$	0
(6)	1								y_0
(7)					1				y_1
(8)					1	h_1	h_1^2	h_1^3	y_2

Es gilt:

$$\boxed{a_0 \overset{(6)}{=} y_0, \quad a_0 \overset{(7)}{=} y_0, \quad c_0 \overset{(4)}{=} 0, \quad d_0 \overset{(3)}{=} \frac{c_1}{3h_0}, \quad d_1 \overset{(5)}{=} -\frac{c_1}{3h_1}}$$

Restsystem:

	b_0	b_1	c_1	
(1)	h_0	0	$\frac{1}{3}h_0^2$	$y_1 - y_0$
(2)	1	-1	h_0	0
(8)	0	h_1	$\underbrace{h_1^2 - \frac{1}{3}h_1^2}_{=\frac{2}{3}h_1^2}$	$y_2 - y_1$

Es folgt:

$$\boxed{b_0 \overset{(1)}{=} \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{1}{3}h_0 c_1, \quad b_1 \overset{(8)}{=} \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{2}{3}h_1 c_1}$$

$$h_0 c_1 \overset{(2)}{=} b_1 - b_0 \underset{\text{einsetzen}}{=} \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{1}{3}h_0 c_1 - \frac{y_2 - y_1}{h_1} + \frac{2}{3}h_1 c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 \underbrace{\left(h_0 + \frac{2}{3}h_1 - \frac{1}{3}h_0\right)}_{\frac{2}{3}(h_0 + h_1)} = \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_0}{h_0}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{c_1 = \frac{3}{2(h_0 + h_1)}\left(\frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_0}{h_0}\right)}$$

Algorithmus:

gegeben:

x_0	x_1	x_2
y_0	y_1	y_2

gesucht: natürliche kubische Spline – Funktion

$$F(x) = \begin{cases} P_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3; & x_0 \le x < x_1 \\ P_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3; & x_1 \le x < x_2 \end{cases}$$

$$\boxed{a_0 = y_0, \quad a_1 = y_1, \quad c_0 = 0}$$

$\downarrow$

$$\boxed{c_1 = \frac{3}{2}\frac{1}{h_0 + h_1}\left(\frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_0}{h_0}\right)} \qquad \begin{aligned} h_0 &= x_1 - x_0 \\ h_1 &= x_2 - x_1 \end{aligned}$$

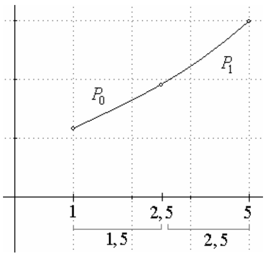
$\downarrow$

$$\boxed{b_0 = \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{1}{3}c_1 h_0, \quad b_1 = \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{2}{3}c_1 h_1, \quad d_0 = \frac{c_1}{3h_0}, \quad d_1 = -\frac{c_1}{3h_1}}$$

4.4 Beispiel

Man berechne die natürliche kubische Spline-Funktion für die folgende Tabelle:

x_i	1	2,5	5
y_i	1,2	1,9	3



Lösung:

$a_0 = 1,2 \quad a_1 = 1,9 \quad c_0 = 0$

$$c_1 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{1,5+2,5}\right)\left(\frac{3-1,9}{2,5} - \frac{19-1,2}{1,5}\right) = -0,01$$

$$b_0 = \frac{1,9-1.2}{1,5} - \frac{1}{3}(-0,01)\cdot 1,5 = 0,4716$$

$$b_1 = 0,456$$

$$d_0 = -\frac{0,01}{3\cdot 1,5} = -0,0022$$

$$d_1 = \frac{0,01}{3\cdot 2,5} = 0,0013$$

$$F(x) = \begin{cases} 1,2 + 0,4716(x-1) - 0,0022(x-1)^3, & x \in [1 \mid 2,5] \\ 1,9 + 0,456(x-2,5) - 0,01(x-2,5)^2 + 0,0013(x-2,5)^3, & x \in [2,5 \mid 5] \end{cases}$$

4.5 Bestimmung einer natürlichen Spline-Funktion für beliebiges *n*

x_i	x_0	x_1	$\ldots$	x_{n-1}	x_n
y_i	y_0	y_1	$\ldots$	y_{n-1}	y_n

$$\underset{i=0,\ldots n-1}{h_i = x_{i+1} - x_i}$$

Algorithmus zur Bestimmung der Spline-Funktion

Bstimmung der Koeffizienten a_i, b_i, c_i, d_i $\quad i = 0,\ldots n-1$

$$P_i(x) = a_i + b_i(x-x_i) + c_i(x-x_i)^2 + d_i(x-x_i)^3$$

(1) setze $\boxed{a_i = y_i \quad c_0 = 0 \quad c_n = 0}$

$i=0,\ldots n$
c_n Hilfsgröße

(2) löse für die c_i $(i = 1,\ldots n-1)$ das LGS

$$\boxed{h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1}+h_i)c_i + h_i c_{i+1} = 3\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right)} \quad i = 1,\ldots n-1$$

Matrixform (Tridiagonal-Matrix - symmetrisch)

$$\begin{pmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & & & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & \\ & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & h_{n-2} \\ 0 & & & \ldots \; h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \\ c_n \end{pmatrix} = 3\cdot \begin{pmatrix} \frac{y_2-y_1}{h_1} - \frac{y_3-y_0}{h_0} \\ \frac{y_3-y_2}{h_2} - \frac{y_2-y_1}{h_1} \\ \vdots \\ \frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{h_{n-2}} \end{pmatrix}$$

Bemerkung:
LGS numerisch lösbar mit Einzel- oder Gesamtschrittverfahren (Zeilenkriterium ist erfüllt)

(3) bestimme

$$\boxed{\begin{aligned} b_i &= \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{\left(2c_i + c_{i+1}\right)}{3} h_i \\ d_i &= \frac{c_{i+1}-c_i}{3h_i} \end{aligned}} \qquad i = 0, \ldots n-1$$

Bsp: Man bestimme die natürliche kubische Spline-Funktion für

x_i	0	1	8	27	64
y_i	0	1	2	3	4

Wertetabelle für $\sqrt[3]{x}$

$$P_i(x) = a_i + b_i(x-x_i) + c_i(x-x_i)^2 + d_i(x-x_i)^3 \qquad , x \in [x_i, x_{i+1}] \quad i = 0,1,2,3$$

Lsg: $h_i = x_{i+1} - x_i$

$h_0 = 1, \quad h_1 = 7, \quad h_2 = 19, \quad h_3 = 37$

(1) $a_i = y_i, \quad a_0 = 0, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 3, \quad c_0 = 0$ Hilfsgröße: $c_4 = 0$

(2) LGS für die c_i $\quad (i = 1,2,3)$

$$\begin{pmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} \frac{y_2-y_1}{h_1} - \frac{y_3-y_0}{h_0} \\ \frac{y_3-y_2}{h_2} - \frac{y_2-y_1}{h_1} \\ \frac{y_4-y_3}{h_3} - \frac{y_3-y_2}{h_2} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 16 & 7 & 0 \\ 7 & 52 & 19 \\ 0 & 19 & 112 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2-1}{7} - \frac{1-0}{1} \\ \frac{3-2}{19} - \frac{1}{7} \\ \frac{1}{37} - \frac{1}{19} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{18}{7} \\ -\frac{36}{133} \\ -\frac{54}{703} \end{pmatrix}$$

Lsg: $c_1 = -1{,}69015 \cdot 10^{-1}$

$c_2 = 1{,}89734 \cdot 10^{-2}$

$c_3 = -3{,}90453 \cdot 10^{-3}$

(3) $b_i = \dfrac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \dfrac{2c_i + c_{i+1}}{3} h_i$:

$b_0 = 1{,}05634; \quad b_1 = 8{,}87323; \quad b_2 = -1{,}62969 \cdot 10^{-1}; \quad b_3 = 1{,}23339 \cdot 10^{-3}$

$d_i = \dfrac{c_{i+1}-c_i}{3h_i}$:

$d_0 = -5{,}63384 \cdot 10^{-2}; \quad d_1 = 8{,}95183 \cdot 10^{-3}; \quad d_2 = -4{,}01367 \cdot 10^{-4}; \quad d_3 = 3{,}5176 \cdot 10^{-5}$

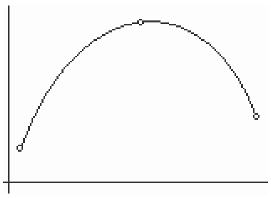
$$F(x) = \begin{cases} P_0(x) = 0 + 1{,}05634(x-0) + 0(x-0)^2 - 0{,}056384(x-0)^3 & 0 \le x \le 1 \\ P_1(x) = 1 + 8{,}87323(x-1) - 0{,}169015(x-1)^2 + 8{,}95183 \cdot 10^{-3}(x-1)^3 & 1 \le x \le 8 \\ P_2(x) = 2 - 0{,}162969(x-8) + 0{,}0189734(x-8)^2 - 4{,}01367 \cdot 10^{-4}(x-8)^3 & 8 \le x \le 27 \\ P_3(x) = 3 + 1{,}23339 \cdot 10^{-3}(x-64) - 3{,}90453 \cdot 10^{-3}(x-64)^2 + 3{,}5176 \cdot 10^{-5}(x-64)^3 & 27 \le x \le 64 \end{cases}$$

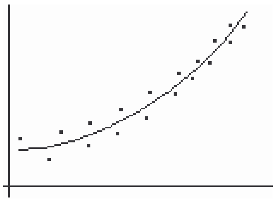
Anmerkung:
Die kubische Spline-Funktion ist im Intervall deutlich genauer, wie z.B die Newton-Interpolation

IV APPROXIMATION

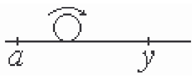
1 Einführung

1.1 Interpolation und Approximation


Interpolation


Approximation

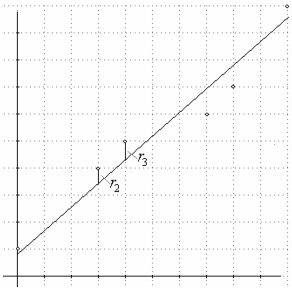
1.2 Beispiel



$y = a + \omega t \qquad \omega:$ Geschwindigkeit (const)

t_1	0	3	4	7	8	10
y_i	1	4	5	6	7	10

Approximation tabellarisch gegebener Werte

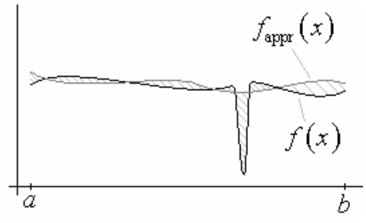


diskrete Approximation

$$s = \sum_{i=1}^{6} r_i^2 = \min \qquad r: \text{Residuum}$$

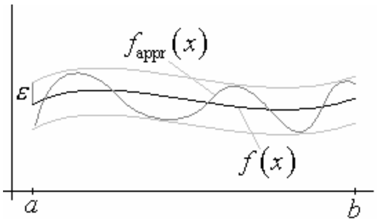
1.3 Stetige Approximation von Funktionen

Gauß-Approximation



$$\varepsilon = \int_a^b \left(f(x) - f_{\text{appr}}(x) \right)^2 dx = \min$$

Tschebyscheff-Approximation

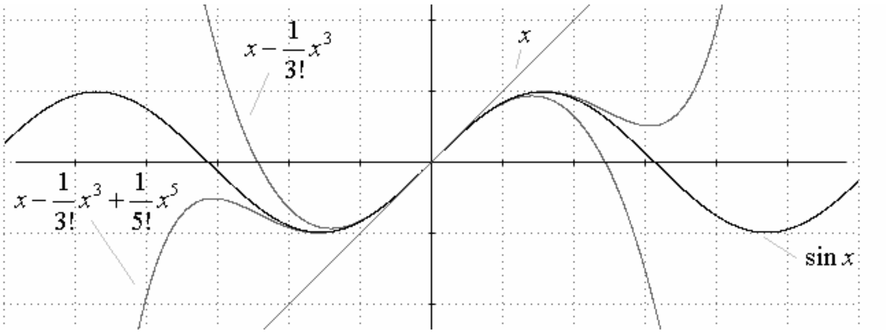


$$\varepsilon = \max_{x \in [a,b]} | f(x) - f_{\text{appr}}(x) | = \min$$

1.4 Approximation durch Taylorentwicklung

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}_{\substack{f_{\text{appr}}(x) \\ \text{Taylorpolynom}}} + \underbrace{R_n(x)}_{\text{Restglied}}$$

Bsp: $\sin x \sim x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots$ (Taylorentwicklung)



Bemerkung: gute Näherung nur um den Entwicklungspunkt

1.5 Satz von Weierstraß

Zu jeder stetigen Funktion $f_i\,[a,b] \to \mathbb{R}$ und jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein Polynom $P(x)$ mit $|\,f(x) - P(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in [a,b]$, d.h. jede stetige Punktion kann mit beliebiger Genauigkeit durch ein Polynom approximiert werden.

Beweisskizze:

Bernsteinpolynome $\boxed{B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}}$

Es gilt: $\lim_{n\to\infty} B_n(x) = f(x)$

2 Polynomapproximation nach der Methode der kleinsten Quadrate

2.1 (Gaußsche) Methode der kleinsten Quadrate

gegeben:

x_i	x_1	$\dots$	x_n
f_i	f_1	$\dots$	f_n

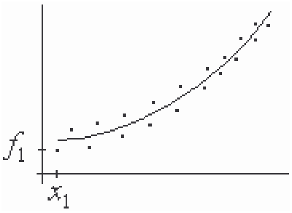
Methode der kleinsten Quadrate

Verfahren zur Bestimmung einer Näherungsfunktion
Polynom (m - 1) – ten Grades

$$P(x) = c_1 + c_2 x + \dots c_m x^{m-1} \quad \boxed{m-1 > n} \qquad (*)$$

mit

$$\boxed{F = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(P(x_i) - f_i \right)^2 = \min}$$



$$\left(m-1 = n \quad \text{Interpolation } F = 0 \right)$$

2.2 Normalgleichung

Die Koeffizienten $c_1, \dots c_m$ von 2.1 (*) lassen sich bestimmen durch das LGS

$$a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \dots a_{1m}c_m = b_1$$
$$a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \dots a_{2m}c_m = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \dots a_{mm}c_m = b_m$$

wobei

$$\boxed{a_{kl} = \sum_{i=1}^{n} x_i^{k+l-2}} \text{ und } \boxed{b_k = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i^{k-1}} \quad k, l = 1, \dots m$$

Bemerkung: (1) Matrix (a_{ik}) ist regulär, d.h. $c_1, \dots c_m$ eindeutig bestimmt

(2) Matrix (a_{ik}) ist symmetrisch

Bew: $$F(c_1 \dots c_m) = \sum_{i=1}^{n} \left(\underbrace{c_1 + c_2 x_i + \dots c_m x_i^{m-1}}_{P(x_i)} - f_i \right)^2 = \min$$

Notwendige Bedingung:

$$\frac{\partial F}{\partial c_k} = 0 = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{2\left(c_1 + c_2 x_i + \dots c_m x_i^{m-1} - f_i \right)}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{x_i^{k-1}}_{\substack{\text{innere} \\ \text{Ableitung}}}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \sum_{i=1}^{n} \left(c_1 + c_2 x_i + \dots c_m x_i^{m+k-2} \right) - \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i^{k-1}$$

$$\Rightarrow \quad c_1 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^{k-1}}_{a_{k1}} + c_2 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^{k}}_{a_{k2}} + \dots c_m \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^{m+k-2}}_{a_{km}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i^{k-1}}_{b_k}$$

$$\Rightarrow \quad a_{k1}c_1 + a_{k2}c_2 + \dots a_{km}c_m = b_k \qquad \left(k\text{-te Normalgleichung} \right)$$

2.3 Beispiel

Nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimme man zu der folgenden Wertetabelle (Meßreihe) eine Approximationsgerade (Ausgleichsgerade / Regressionsgerade)

x_i	0	1	2	3	4
f_i	$-3,00$	$-1,02$	$1,04$	$3,01$	$4,95$

Lsg: $P(x) = c_1 + c_2 x \quad (m = 2)$

Normalgleichung

$$\begin{Bmatrix} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 = b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 = b_2 \end{Bmatrix}$$

$$a_{kl} = \sum_{i=1}^{5} x_i^{k+l-2} \qquad b_k = \sum_{i=1}^{5} f_i \cdot x_i^{k-1} \qquad k,l = 1,2$$

i	x_i^0	x_i^1	x_i^2	f_i	$f_i \cdot x_i$
1	1	0	0	-3,00	0
2	1	1	1	-1,02	-1,02
3	1	2	4	1,04	2,08
4	1	3	9	3,01	9,03
5	1	4	16	4,95	19,80
$\sum$	$a_{11} = 5$	$a_{12} = a_{21} = 10$	$a_{22} = 30$	$b_1 = 4,98$	$b_2 = 29,89$

Normalengleichungen

$$5c_1 + 10c_2 = 4,98$$
$$10c_1 + 30c_2 = 29,89$$

Lösungen:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4,98 & 10 \\ 29,89 & 30 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{vmatrix}} = \frac{4,98 \cdot 30 - 29,89 \cdot 10}{50} = -2,99$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 4,98 \\ 10 & 29,89 \end{vmatrix}}{50} = 1,99$$

Ausgleichsgerade: $P(x) = -2,99 + 1,99x$

3 Gauß – Approximation von Funktionen

3.1 Definition

(1) $C[a,b]=$ Menge aller stetigen Funktionen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$

(2) Ein Funktionensystem $\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ mit $\varphi_i\in C[a,b]$ heißt linear unabhängig, wenn

$$\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\cdot\varphi_i=\underset{\text{Nullfunktion}}{0}\quad\Leftrightarrow\quad\lambda_0=\lambda_1=\ldots=\lambda_n=0$$

$\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ heißen dann Basisfunktionen

Beispiele

(1) Die Potenzfunktionen $\varphi_0(x)=1,\ \varphi_1(x)=x,\ \varphi_2(x)=x^2,\ \ldots,\ \varphi_n(x)=x^n$ sind linear unabhängig (Basisfunktionen)

Bew: $\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\cdot\varphi_i=0\ \Rightarrow\ \lambda_0+\lambda_1x+\lambda_2x^2+\ldots+x_nx^n=0\ \Rightarrow$ Fundamentalsatz der Algebra

$\Rightarrow\ \lambda_0=\lambda_1=\ldots=\lambda_n=0\ \Rightarrow$ linear unabhängig

(2) Die Funktionen $\varphi_1=\sin x,\ \varphi_2(x)=2\cdot\sin x,\ \ldots,\ \varphi_n(x)=n\cdot\sin x$ sind linear abhängig

Bew: $$\underbrace{\left(1-\frac{n(n+1)}{2}\right)}_{\lambda_1}\cdot\overbrace{1\cdot\sin x}^{\varphi_1}+\underbrace{1}_{\lambda_2}\cdot\overbrace{2\cdot\sin x}^{\varphi_2}+\ldots+\underbrace{1}_{\lambda_n}\cdot\overbrace{n\cdot\sin x}^{\varphi_n}$$

$$=\sin x+2\cdot\sin x+\ldots+n\cdot\sin x-\frac{n(n+1)}{2}\cdot\sin x=\underbrace{(1+2+\ldots+n)}_{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot\sin x-\frac{n(n+1)}{2}\cdot\sin x=0$$

$\Rightarrow$ linear abhängig

(3) $\varphi_1(x)=\sin x,\ \varphi_2(x)=\sin(2x),\ \ldots,\ \varphi_n(x)=\sin(nx)$
$\psi_1(x)=\sin x,\ \psi_2(x)=\sin(2x),\ \ldots,\ \psi_n(x)=\sin(nx)$
sind Basisfunktionen

3.2 Skalarprodukt von stetigen Funktionen

Das Skalarprodukt von $f,g\in C[a,b]$ ist definiert durch

$$\boxed{(f,g)\overset{\text{Def.}}{=}\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx}$$

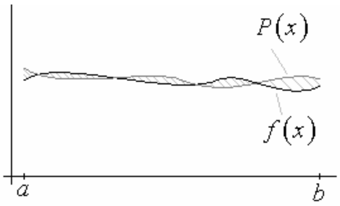
Bsp: $(\sin x,\cos x)=\int_a^b\sin x\cdot\cos x\cdot dx$

3.3 Gauß – Approximation

gegeben: Basisfunktionen $\varphi_0,\ldots,\varphi_n$ und $f\in C[a,b]$

gesucht: Koeffizienten $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$ der Funktion
$P(x)=a_0\cdot\varphi_0(x)+\ldots+a_n\cdot\varphi_n(x)$,
so dass

$$\boxed{\int_a^b\left(f(x)-P(x)\right)^2dx=\min}$$



Algorithmus zur Bestimmung der $a_0, a_1, \dots, a_n$

Die gesuchten Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n$ sind Lösungen des LGS

$$\underbrace{\begin{pmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \dots & (\varphi_0,\varphi_n) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \dots & (\varphi_1,\varphi_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_1) & \dots & (\varphi_n,\varphi_n) \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f,\varphi_0) \\ (f,\varphi_1) \\ \vdots \\ (f,\varphi_n) \end{pmatrix} \qquad \text{Normalgleichung}$$

det A heißt Gramsche Determinante der Basisfunktionen $\varphi_0, \dots, \varphi_n$

Bew: Ansatz: $P(x) = a_0 \cdot \varphi_0(x) + \dots + a_n \cdot \varphi_n(x)$

$$F(a_0, \dots, a_n) = \int_a^b \left(f(x) - a_0 \cdot \varphi_0(x) - \dots - a_n \cdot \varphi_n(x) \right)^2 dx$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_i} = \frac{\partial}{\partial a_i} \int_a^b \left(f(x) - a_0 \cdot \varphi_0(x) - \dots - a_n \cdot \varphi_n(x) \right)^2 dx = \int_a^b 2\left(f(x) - a_0 \cdot \varphi_0(x) - \dots - a_n \cdot \varphi_n(x) \right)\left(-\varphi_i(x) \right) dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b \left(-\varphi_i(x) \cdot f(x) + a_0 \cdot \varphi_i(x) \cdot \varphi_0(x) + \dots + a_n \cdot \varphi_i(x) \cdot \varphi_n(x) \right) dx = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{a_0 \int_a^b \varphi_0(x) \cdot \varphi_i(x)\, dx}_{a_0(\varphi_i,\varphi_0)} + \dots + \underbrace{a_n \int_a^b \varphi_n(x) \cdot \varphi_i(x)\, dx}_{a_n(\varphi_i,\varphi_n)} = \underbrace{\int_a^b f(x) \cdot f_i(x)\, dx}_{(f,\varphi_i)}$$

$$\Rightarrow a_0(\varphi_i,\varphi_0) + \dots + a_n(\varphi_i,\varphi_n) = (f_i,\varphi_i) \quad i\text{-te Normalgleichung}$$

Bemerkung: $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ Basisfunktionen $\Leftrightarrow$ Gramsche Determinante $\det A \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $(a_0, \dots, a_n)$ eindeutig bestimmt

3.4 Beispiel

Man approximiere $f(x) = \sqrt{x}$ in $[a,b] = \left[\frac{1}{16}, 1\right]$ durch die Basisfunktionen $\varphi_0 = 1$ und $\varphi_1(x) = x$

Lsg: Ansatz: $P(x) = a_0 \cdot \varphi_0(x) + a_1 \cdot \varphi_1(x) = a_0 + a_1 \cdot x$

$$\begin{pmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f,\varphi_0) \\ (f,\varphi_1) \end{pmatrix}$$

$$(\varphi_0,\varphi_0) = \int_{\frac{1}{16}}^{1} dx = 0{,}9375 \qquad (\varphi_1,\varphi_1) = \int_{\frac{1}{16}}^{1} x^2 \cdot dx = 0{,}333252$$

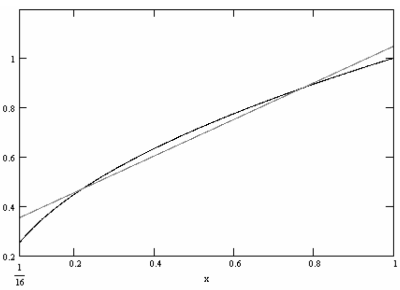
$$(\varphi_1,\varphi_0) = (\varphi_0,\varphi_1) = \int_{\frac{1}{16}}^{1} x \cdot dx = 0{,}498047 \qquad (f,\varphi_0) = \int_{\frac{1}{16}}^{1} \sqrt{x} \cdot dx = 0{,}65620$$

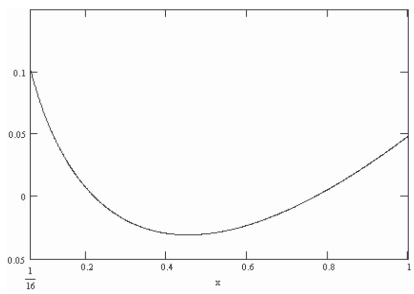
$$(f,\varphi_1) = \int_{\frac{1}{16}}^{1} \sqrt{x} \cdot x \cdot dx = \int_{\frac{1}{16}}^{1} x^{\frac{3}{2}} \cdot dx = 0{,}399609$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}9375 & 0{,}498047 \\ 0{,}498047 & 0{,}333252 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}65620 \\ 0{,}399609 \end{pmatrix}$$

Lsg: $a_0 = 0{,}305603$ $\qquad a_1 = 0{,}742394$

$P(x) = 0{,}305603 + 0{,}742394x$ $\qquad \varepsilon(x) = P(x) - \sqrt{x}$





V NUMERISCHE INTEGRATION

1 Einführung

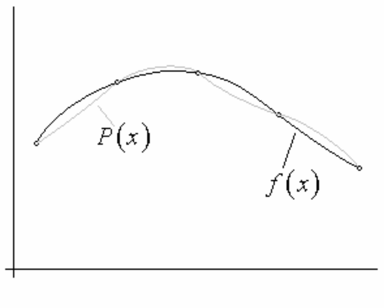
Nicht analytisch lösbare Integrale:

$$\int_a^b e^{-x^2}\,dx$$

$$\int_a^b \tan x^2\,dx$$

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx$$

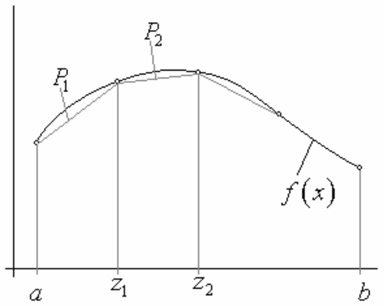
Inpolation über $[a,b]$



$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b P(x)\,dx$$

Verfahren zu aufwendig und ungenau

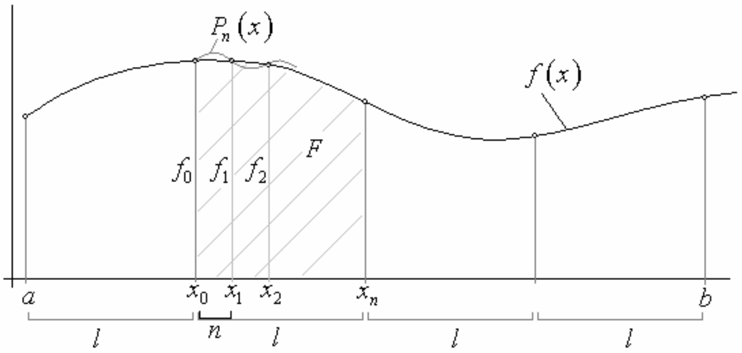
Interpolation über Teilintervalle



$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} \int_{z_i}^{z_{i+1}} P_i(x)\,dx$$

2 Newton – Cotes – Formel (Formel für Segmente)

2.1 Lagrange – Interpolationspolynom



$\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ äquidistant, d.h. $x_i = x_0 + i \cdot h$

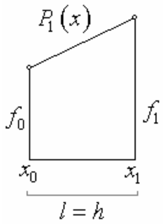
Sei $P_n(x) = f_0 L_0(x) + \ldots + f_n L_n(x)$ das Lagrange - Interpolationspolynom

Für die Integration

$$\boxed{F = \int_{x_0}^{x_n} P_n(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx}$$

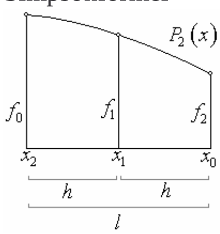
gelten die Newton - Cotes - Formeln:

$h = 1$: Sehnentrapezformel



$$\boxed{F = \frac{l}{2}(f_0 + f_1)}$$

$h = 2$: Simpsonformel



$$\boxed{F = \frac{l}{6}(f_0 + 4f_1 + f_2)}$$

Bew: Langrange – Interpolationspolynom

Für $s = \dfrac{x - x_1}{h}$ gilt: $x - x_1 = s \cdot h$

$$x - x_0 = x - (x_1 - h) = x - x_1 + h = s \cdot h + h = (s+1) \cdot h$$
$$x - x_2 = x - (x_1 + h) = x - x_1 - h = s \cdot h - h = (s-1) \cdot h$$

$$P_2(x) = f_0 \cdot L_0(x) + f_1 \cdot L_1(x) + f_2 \cdot L_2(x)$$
$$= \frac{f_0}{2} \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{\underbrace{(x_0 - x_1)}_{s}\underbrace{(x_0 - x_2)}_{s-1}} - f_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{\underbrace{(x_1 - x_0)}_{s+1}\underbrace{(x_1 - x_2)}_{s-1}} + \frac{f_2}{2} \frac{(x - x_0)(x - x_0)}{\underbrace{(x_2 - x_0)}_{s+1}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{2}}$$
$$= \frac{f_0}{2} s(s-1) - f_1(s+1)(s-1) + \frac{f_0}{2}(s+1)s$$

$$F=\int_{x_0}^{x_2} P_2(x)\,\mathrm{d}x \underset{s=\frac{x-x_1}{h}}{=} \int_{-1}^{1}\left[\frac{f_0}{2}s(s-1)-f_1(s+1)(s-1)+\frac{f_0}{2}(s+1)s\right]\cdot h\cdot \mathrm{d}s$$

$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}h}=\frac{1}{h}$

$\mathrm{d}x=h\cdot\mathrm{d}s$

$x=x_0:\quad s=\frac{x_0-x_1}{h}=\frac{-h}{h}=-1$

$x=x_2:\quad s=\frac{x_2-x_1}{h}=\frac{h}{h}=1$

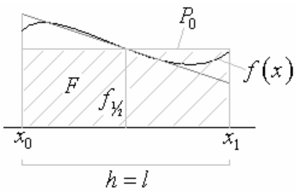
$$=\frac{f_0}{2}h\underbrace{\int_{-1}^{1}s(s-1)\cdot\mathrm{d}s}_{\frac{2}{3}}-f_1\cdot h\underbrace{\int_{-1}^{1}(s+1)(s-1)\cdot\mathrm{d}s}_{-\frac{4}{3}}+\frac{f_0}{2}\cdot h\underbrace{\int_{-1}^{1}(s+1)s\cdot\mathrm{d}s}_{\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{1}{3}h\cdot f_0+\frac{4}{3}h\cdot f_1+\frac{1}{3}h\cdot f_2=\frac{1}{3}h\cdot\left(f_0+4\cdot f_1+f_2\right)=\frac{l}{6}\left(f_0+4\cdot f_1+f_2\right)$$

$h=3:$ $\quad$ $\frac{3}{8}$ – Formel

$$\underbrace{\boxed{F=\frac{3}{8}h\left(f_0+3\cdot f_1+3\cdot f_2+f_3\right)}}_{l=3h}$$

$h=0:$ $\quad$ Tangententrapezformel



$$\boxed{F=l\cdot f_{1/2}}$$

2.2 Formeln von Newton – Cotes

Allgemein gilt: $\quad F=\int_{x_0}^{x_n} P_n(x)\,\mathrm{d}x=l\cdot\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\cdot f_i \quad , \quad \sum_{i=0}^{n}\alpha_i=1 \quad , \quad l=x_n-x_0$

Tangententrapez	$F=l\cdot f_{1/2}$
Sehnentrapez	$F=\frac{l}{2}\left(f_0+f_1\right)$
Simpson	$F=\frac{l}{6}\left(f_0+4f_1+f_2\right)$
$\frac{3}{8}$ – Formel	$F=\frac{3}{8}h\left(f_0+3\cdot f_1+3\cdot f_2+f_3\right)$

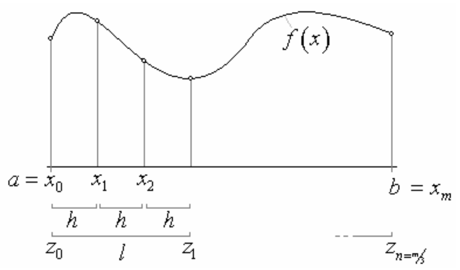
3 Numerische Integrationsverfahren insbesondere Sehnentrapez- und Simpsonverfahren

3.1 Definition

gegeben: $f: \; [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion

Zerlegung von $[a,b]$: $\quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m = b$

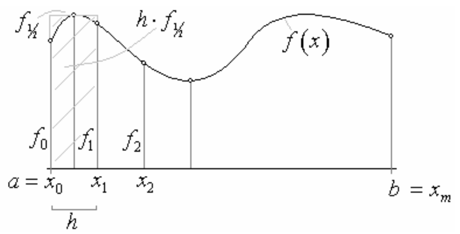
$x_i = x_0 + i \cdot h$ mit $h = \dfrac{b-a}{m}$



Es gilt: $\displaystyle \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{z_i}^{z_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad z_0 = a \quad , \quad z_m = b$

bzw. $\displaystyle \boxed{F = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{z_i}^{z_{i+1}} P(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x} \qquad \int_{z_i}^{z_{i+1}} P(x)\,\mathrm{d}x$: Berechnung durch Newton-Cotes-Formeln

3.2 Tangententrapezsumme

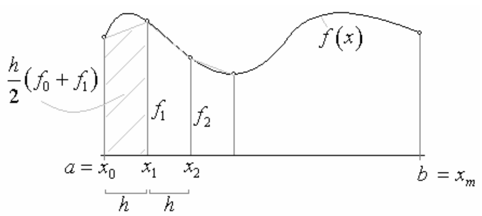


$$\boxed{F = h \cdot \left(f_{1/2} + f_{3/2} + \ldots + f_{m-1/2} \right)} \approx \int_a^b f(x)$$

Riemansche Summe

3.3 Sehnentrapezsumme

$n = 1$:



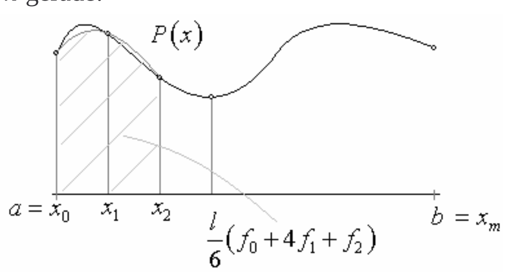
$$F = \frac{h}{2}\left(f_0 + f_2 \right) + \frac{h}{2}\left(f_1 + f_2 \right) + \ldots + \frac{h}{2}\left(f_{m-1} + f_m \right)$$

$$\boxed{F = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{m-1} + f_m \right)} \approx \int_a^b f(x)$$

Trapezsumme

3.4 Simpsonsumme

n gerade:



$$F = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + f_2 \right) + \frac{h}{3}\left(f_2 + 4f_3 + f_4 \right) + \ldots + \frac{h}{3}\left(f_{m-2} + 4f_{m-1} + f_m \right)$$

$$\boxed{F = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \ldots 4f_{m-1} + f_m \right)} \approx \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Simpsonsumme

3.5 Beispiel

Man berechne $\int_1^{1,8} \ln x \cdot \mathrm{d}x$ mittels

a) Sehnentrapezsumme

b) Simpsonsumme

mit der Schrittweite $h = 0,2$

Lsg: a) $F = \frac{0,2}{2}\left(\ln 1 + 2\cdot\ln 1,2 + 2\cdot\ln 1,4 + 2\cdot \ln 1,6 + \ln 1,8\right) = 0,2565$

b) $F = \frac{0,2}{3}\left(\ln 1 + 4\cdot\ln 1,2 + 2\cdot\ln 1,4 + 4\cdot \ln 1,6 + \ln 1,8\right) = 0,2580$

exaktes Ergebnis: $\int_1^{1,8} \ln x \cdot \mathrm{d}x = \left[x\cdot \ln x - x\right]_1^{1,8} = 0,2580$

3.6 Fehlerabschätzung

(1) Für die Sehentrapezsumme F_1 gilt:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - F_1 = -\frac{b-a}{2}\cdot f''(x)\cdot h^2 \quad \text{für ein } x\in[a,b]$$

und demnach

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le M_1\cdot h^2 \quad \text{mit } M_1 = \frac{b-a}{2}\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|}$$

Fehler geht mit h^2 gegen 0

(2) Für die Simpsonsumme gilt:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - F_2 = -\frac{b-a}{180}\cdot f^{(4)}(x)\cdot h^4 \quad \text{für ein } x\in[a,b]$$

und demnach

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - F_2\right| \le M_2\cdot h^4 \quad \text{mit } M_2 = \frac{b-a}{180}\max_{x\in[a,b]}|f^{(4)}(x)|}$$

Fehler geht mit h^4 gegen 0

Bsp: Man gebe eine Fehlerabschätzung

a) Sehnentrapezsumme

b) Simpsonsumme

für

$\int_1^{1,8} \ln x\,\mathrm{d}x$ an. (Schrittweite $h = 0,2$)

Lsg: $f(x) = \ln x;\quad f'(x) = \frac{1}{x};\quad f''(x) = -\frac{1}{x^2};\quad f'''(x) = \frac{2}{x^3};\quad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$

a) $M_1 = \frac{b-a}{2}\max_{x\in[a,b]}|f''(x)| = \frac{0,8}{2}\max_{x\in[1|1,8]}\left|-\frac{1}{x^2}\right| = 0,4\max_{x\in[1|1,8]}\frac{1}{x^2} = 0,4$

$$\Rightarrow \left|\int_1^{1,8}\ln x\,\mathrm{d}x - F_1\right| \le 0,4\cdot h^2 \underset{h=0,2}{=} 0,4\cdot(0,2)^2 = 0,016$$

$$\underset{h=0,02}{=} 1,6\cdot 10^{-4}$$

$$M_2 = \frac{1,8-1}{180}\max_{x\in[1|1,8]}\left|\frac{-6}{x^4}\right| = \frac{0,8}{180}\max_{x\in[1|1,8]}\frac{6}{x^4} = \frac{0,8\cdot 6}{180} = 0,0\overline{26}$$

b) $$\Rightarrow \left|\int_1^{1,8}\ln x\,\mathrm{d}x - F_1\right| \le 0,0\overline{26}\cdot h^4 \underset{h=0,2}{=} 0,0\overline{26}\cdot(0,2)^4 = 4,26\cdot 10^{-5}$$

$$\underset{h=0,02}{=} 1,6\cdot 10^{-4}$$

3.7 Bemerkung

Sehnentrapezsumme exakt, wenn $f(x)$ linear

Simpsonssumme exakt, wenn $f(x)$ quadratisch und kubisches Polynom

VI NUMERISCHE METHODE ZUR LÖSUNG GEWÖHNLICHER DGL

1 Einführung

1.1 Anfangswertproblem (AWP)

Gesucht ist eine Lösung $y(x)$ von

$$\boxed{\begin{array}{l} y^{(n)} = f\left(x, x, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \\ y(x_0) = y_0, \quad y(x_0) = y_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{array}}$$

AWP n-ter Ordnung

AWP 1. Ordnung

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

Beispiele

(1) $y' = y, \quad y(0) = ?$

Lsg: Allgemeine Lsg: $y = C\,e^x$

Lsg des AWP: $y(0) = C\,e^0 = 2 \quad \Rightarrow \quad C = 2 \quad \Rightarrow \quad y = 2\,e^x$

(2) $y' = x^2 + y^2$ nicht allgemein lösbar

(3) AWP: $y' = -\dfrac{3x^2 + 2y}{2x + 3y^2} \qquad y(0) = 1$

Analytische Lsg: $y^3 + 2xy + x^3 = 1$ (nicht nach y auflösbar)

1.2 Randwertproblem (RWP)

Gesucht eine Lösung $y(x)$ der DGL

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

die n Werte der Funktion oder einiger ihrer Ableitungen an mindestens zwei verschiedenen Stellen x annimmt.

Beispiel: $y'' = f(x, y, y')$ mit $y(a) = y_1, \quad y(b) = y_2$ RWP 2. Ordnung

$y'' = f(x, y, y')$ mit $y'(a) = y_1, \quad y(b) = y_2$ RWP 2. Ordnung

Bsp: RWP: $y'' = 3x - 2, \quad y(0) = 2, \quad y(1) = -1$

Allg Lsg: $y' = \dfrac{3}{2}x^2 - 2x + c_1, \quad y = \dfrac{x^3}{2} - x^2 + c_1 x + c_2$

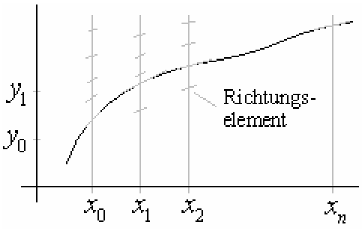
Lsg des RWP: $y(0) = c_2 = 2, \quad y(1) = \dfrac{1}{2} - 1 + c_1 + 2 = -1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -2{,}5$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{x^3}{2} - x^2 - 2{,}5x + 2$$

2 Das Polynomzug – Verfahren von Euler

2.1 Richtungfeld

Durch die DGL 1. Ordnung $y' = f(x,y)$ ist ein Richtungsfeld festgelegt.

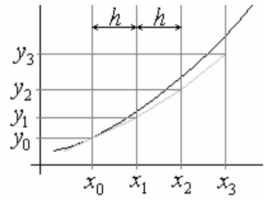


Lösungskurve $y(x)$ mit Anfangsbedingung $y(x_0) = x_0$

Steigung: $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$
$y'(x_1) = f(x_1, y_1)$

2.2 Das Verfahren von Euler

gegeben ist das AWP: $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$



$h =$ Schrittweite

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = y'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

Steigung: $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$
$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) \approx y(x_1)$
$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) \approx y(x_2)$
$\vdots$

Der Polynomzug mit den Eckpunkten (x_k, y_k), wobei

$\boxed{y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k)}$ y_0 gegeben

liefert eine Näherungslösung der exakten Lösung $y(x)$

Bsp: Man bestimmen mit dem Verfahren von Euler eine Näherungslösung des AWP's
$y' = y \qquad y(0) = 1$
im Intervall $[0,1]$. Man wähle als Schrittweite $h = 1/16$.

x_k	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\ldots$	1
y_k	1	?	?	?	$\ldots$	

Lsg: $f(x, y) = y$

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k) = y_k + \frac{1}{16} \cdot y_k = \frac{17}{16} \cdot y_k \qquad y_0 = y(0) = 1$$

x_k	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\ldots$	1
y_k	1	$\frac{17}{16} = 1{,}0625$	$\left(\frac{17}{16}\right)^2 = 1{,}1298$	$\left(\frac{17}{16}\right)^3 = 1{,}1995$	$\ldots$	$\left(\frac{17}{16}\right)^{16} = 2{,}63792$
$\underset{\text{exakt}}{y(x_k) = e^{x_k}}$	1	$1{,}0644$	$1{,}20623$	$1{,}20623$	$\ldots$	$e^1 = 2{,}71828$

Bemerkung: Verfahren von Euler ungenau

3 Das Runge – Kutta – Verfahren

Prinzip: Berechnung einer „repräsentativen Steigung“

3.1 Das Verfahren von Runge – Kutta 2. Ordnung

gegeben: AWP $\boxed{y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0}$

Gitterpunkte: $x_n = x_0 + n \cdot h, \quad h = \text{Schrittweite}$

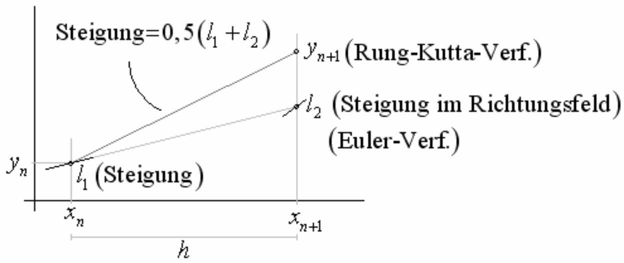
Algorithmus zur Bestimmung der Näherungswerte $y_n \approx y(x_n)$

$$\boxed{\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{2} \cdot h(l_1 + l_2) \\ l_1 &= f(x_n,\, y_n) \\ l_2 &= f(x_n + h,\, y_n + h \cdot l_1) \end{aligned}}$$

Runge - Kutta 2. Ordnung
$n = 1, 2, \ldots$

Geometrische Deutung

$$l_2 = f\left(x_{n+1},\, \underbrace{y_n + h \cdot f(x_n,\, y_n)}_{\text{Eulersche Wert}}\right) \qquad \frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \frac{1}{2}(l_1 + l_2) \text{ Steigung}$$



Bsp: AWP $y' = y - \dfrac{2x}{y}$, $y(0) = 1$

Man bestimme einen Näherungswert der Lösung $y(x)$ in 0,2 und 0,4.

x_1	0	0,2	0,4
y_1	1	?	?

$h = 0{,}2 \quad x_0 = 0 \quad y_0 = 1 \quad f(x,y) = y - \dfrac{2x}{y}$

$n = 0$: $\quad y_1 = y_0 + \dfrac{1}{2} \cdot 0{,}2(l_1 + l_2)$

$$l_1 = f(x_0,\, y_0) = f(0,\, 1) = 1$$

$$l_2 = f(x_0 + h,\, y_0 + h \cdot l_1) = f(0{,}2\,|\,1{,}2) = 0{,}8\overline{6}$$

$$y_1 = 1 + 0{,}1(1 + 0{,}8\overline{6}) = 1{,}18\overline{6} \approx y(0{,}2)$$

$n = 1$: $\quad y_2 = y_1 + \dfrac{1}{2} \cdot 0{,}2(l_1 + l_2)$

$$l_1 = f(x_1,\, y_1) = f(0{,}2\,|\,1{,}8\overline{6}) = 0{,}849588$$

$$l_2 = f(x_1 + h,\, y_1 + h l_1) = f(0{,}4\,|\,1{,}18\overline{6} + 0{,}2 \cdot 0{,}849588) = 0{,}766869$$

$$y_2 = 1{,}348313 \approx y(0{,}4)$$

exakte Lösung: $y = \sqrt{2x+1}$

$$y(0{,}2) = 1{,}1832 \approx y_1 = 1{,}18\overline{6}$$

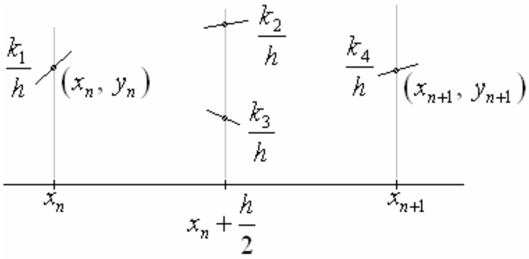
$$y(0{,}4) = 1{,}3416 \approx y_2 = 1{,}3483$$

3.2 Das Verfahren von Runge – Kutta 4. Ordnung

gegeben: AWP $\boxed{y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0}$

$$\boxed{\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 &= h \cdot f(x_n,\, y_n) \\ k_2 &= h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2},\, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2},\, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= h \cdot f(x_n + h,\, y_n + k_3) \end{aligned}}$$

Geometrische Deutung



Bsp: (vgl 3.1) AWP $y' = y - \dfrac{2x}{y}$, $y(0) = 1$

Man bestimme einen Näherungswert der Lösung $y(x)$ in 0,2 und 0,4.

x_1	0	0,2	0,4
y_1	1	?	?

$h = 0{,}2 \quad x_0 = 0 \quad y_0 = 1 \quad f(x,y) = y - \dfrac{2x}{y}$

$n = 0$: $\quad y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

$$k_1 = h \cdot f(x_n,\, y_n) = 0{,}2 \cdot f(0{,}1) = 0{,}2$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2},\, y_n + \frac{k_1}{2}\right) = 0{,}2 \cdot f(0{,}1\,|\,1{,}1) = 0{,}183636$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2},\, y_n + \frac{k_2}{2}\right) = 0{,}2 \cdot f\left(0{,}1\,|\,1 + \frac{0{,}183636}{2}\right) = 0{,}181727$$

$$k_4 = h \cdot f(x_n + h,\, y_n + k_3) = 0{,}2 \cdot f(0{,}2\,|\,1 + 0{,}181727) = 0{,}168648$$

$$y_1 = 1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1{,}183229 \approx y(0{,}2)$$

$n = 1$: $\quad y_2 = y_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

$$= 1{,}183229 + \frac{1}{6}(0{,}169034 + 2 \cdot 0{,}158893 + 2 \cdot 0{,}157499 + 0{,}148807) = 1{,}341667 \approx y(0{,}4)$$

exakte Lösung: $y = \sqrt{2x+1}$

x_n	exakt	R-K 4. Ord	R-K 2. Ord	Euler
0	1	1	1	1
0,2	1,183216	1,183229	1,186667	1,2
0,4	1,341641	1,341667	1,348313	1,37333

dominik erdmann
ingenieurinformatik
fh – bingen

3.3 Schrittweitenanpassung für Runge – Kutta 4. Ordnung

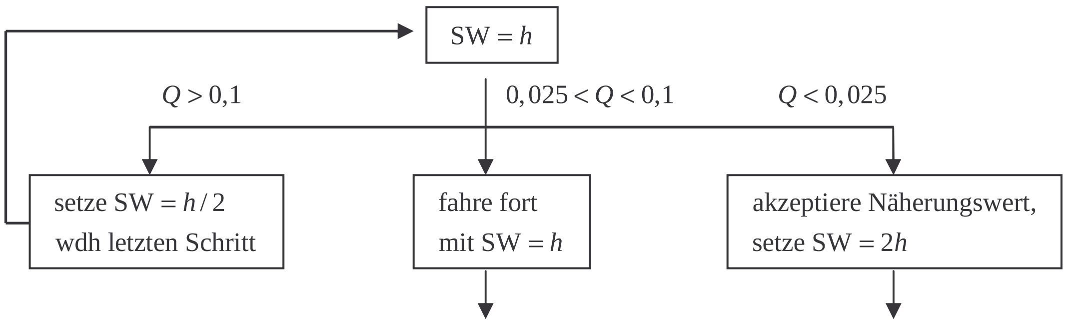
h optimale Schrittweite, falls

$$0{,}025 < Q < 0{,}1 \quad \text{mit } Q = \left| \frac{k_3 - k_2}{k_2 - k_1} \right|$$

$Q > 0{,}1$: ungenaue Näherungswerte

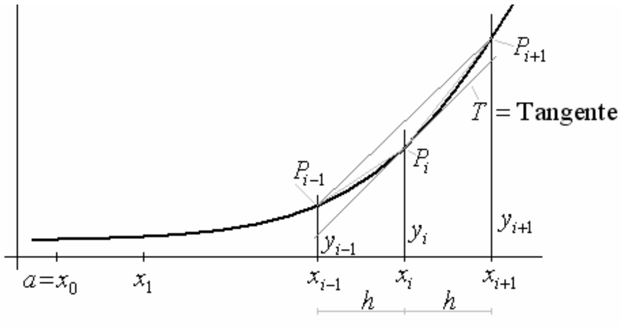
$Q < 0{,}025$: Rundungsfehler zu hoch

Algorithmus



4 Das Differenzenverfahren

4.1 Annäherung von Ableitungen durch Differenzen



$\boxed{y_i' \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h}}$ rückwärts genommene Differenz

$\boxed{y_i' \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}}$ vorwärts genommene Differenz

$\boxed{y_i' \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}}$ zentrale Differenz

$$y_i'' \approx \frac{y_{i+1}' - y_i'}{h} = \frac{\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h}}{h}$$

$$\boxed{y_i'' \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}}$$

$$\boxed{y_i''' \approx \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}}{2h^3}}$$

4.2 Differenzenverfahren

gegeben: $\begin{Bmatrix} \text{RWP} \\ \text{AWP} \end{Bmatrix}: \quad y^{(n)} = f\left(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}\right)$ mit n $\begin{Bmatrix} \text{Randbedingungen} \\ \text{Anfangsbed.} \end{Bmatrix}$

Ersetzt man in der DGL die Ableitungen durch eintsprechende Differenzen, so entsteht ein algebraische Gleichungssystem, dessen Lösungen y_i Näherungswerte der Lösung $y(x)$ liefern.

Bemerkung:
$y^{(n)} = f\left(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}\right)$ linear $\Rightarrow$ algebraisches Gleichungssystem linear

Definition:
Die DGL der Form

$$a_0(x)\,y + a_1(x)\,y' + \ldots + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + a_n(x)\,y^{(n)} = g(x)$$

heißt linear.

Bsp: $\underbrace{e^x}_{a_0(x)} y + \underbrace{\sin(x)}_{a_2(x)} y'' = \underbrace{\cos x}_{g(x)}$

Beispiele:

(1) RWP: $y'' = 1 - y, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2$

Man bestimme die Funktionswerte $y(0,2)$, $y(0,4)$, $y(0,6)$, $y(0,8)$ der Lösung $y(x)$

Lsg: $h = 0,2 \quad f(x, y, y') = 1 - y, \quad y_0 = 1, \quad y_5 = 2$

$$y''(x_i) = y_i'' \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = 1 - y_i$$

$$\overset{h=0,2}{\Rightarrow} \quad y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = 0,04 - 0,04 y_i \quad \Rightarrow \quad \underset{i=1,\ldots,4}{\boxed{y_{i-1} = -1,94 y_i + y_{i+1} = 0,04}}$$

$$\begin{array}{l|llllll}
i=1 & y_0 & -1,96y_1 & +y_2 & & & = 0,04 \\
i=2 & & y_1 & -1,96y_2 & +y_3 & & = 0,04 \\
i=3 & & & y_2 & -1,96y_3 & +y_4 & = 0,04 \\
i=4 & & & & y_3 & -1,96y_4 \quad +y_5 & = 0,04
\end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -1,94 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1,94 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1,94 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1,94 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,96 \\ 0,04 \\ 0,04 \\ -1,96 \end{pmatrix}$$

Lösungen (GAUSS – Algorithmus oder iterativ)

	exakt: $y(x) = 1,188839 \cdot \sin x + 1$
$y(0,2) \approx y_1 = 1,236233$	$1,236195$
$y(0,4) \approx y_2 = 1,463018$	$1,462782$
$y(0,6) \approx y_3 = 1,671018$	$1,671018$
$y(0,4) \approx y_4 = 1,852695$	$1,852503$

(2) AWP: $y'' + y = 2\cos x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$

Man bestimme die Funktionswerte $y(0,25)$, $y(0,5)$, $y(0,75)$ der Lösung $y(x)$

Lsg: $h = 0,25 \quad f(x, y, y') = 2\cos x, \quad y_0 = 1, \quad y_0' = 1$

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + y_i = 2\cos x_i \qquad i = 1,2$$

$$\underset{h=\frac{1}{4}}{\Rightarrow} \quad 16y_{i-1} - 31y_i + 16y_{i+1} = 2\cos x_i$$

$$\begin{array}{l|l}
i=1 & 16y_0 - 31y_1 + 16y_2 \qquad = 2\cos x_1 = 2\cos 0,25 = 1,7552 \\
i=2 & \qquad 16y_1 - 31y_2 + 16y_3 = 2\cos x_2 = 2\cos 0,5 = 1,9378
\end{array}$$

Anfangsbedingung: $y_0 = 1$

$$y'(0) = 1 = y_0' = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{y_1 - 1}{0,25} \quad \Rightarrow \quad y_1 = 0,25 + 1 = 1,25$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 16 & 0 \\ -31 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24,6878 \\ -18,2448 \end{pmatrix}$$

Lösungen (Cramersche Regel)

$y_2 = 1,54$

$y_3 = 1,84$

dominik erdmann
ingenieurinformatik
fh – bingen

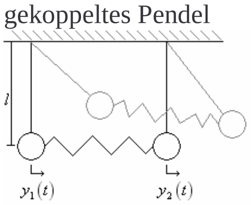
5 R-K-Verfahren für Systeme von gew. DGL 1. Ordnung und DGLen höherer Ordnung

5.1 System von DGLen

Anfangsbedingungen

$$
\begin{aligned}
y_1' &= (x,\ y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_n) \qquad & y_1(x_0) &= y_{1,0} \\
y_2' &= (x,\ y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_n) \qquad & y_{21}(x_0) &= y_{2,0} \\
&\ \vdots & &\ \vdots \\
y_n' &= (x,\ y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_n) \qquad & y_n(x_0) &= y_{n,0}
\end{aligned}
$$

Beispiel: gekoppeltes Pendel



α: Federkonstante
m: Masse

$$
\begin{aligned}
y_1''(t) &= -\frac{g}{l} \cdot y(t) + \frac{\alpha}{m} \\
y_2''(t) &= -\frac{g}{l} \cdot y_2(t) + \frac{\alpha}{m}\left(y_1(t) - y_2(t)\right)
\end{aligned}
$$

5.2 Runge-Kutta-Verfahren (für 2 DGLen)

gegeben:
$$
\begin{aligned}
y_1' &= f_1(x,\ y_1,\ y_2), \quad y_1(x_0) = y_{1,0} \\
y_2' &= f_2(x,\ y_1,\ y_2), \quad y_2(x_0) = y_{2,0}
\end{aligned}
$$

Schrittweite: h $\qquad x_i = x_0 + i \cdot h$

Algorithmus zur Bestimmung von $y_{1,i} \approx y_1(x_i)$ und $y_{2,i} \approx y_2(x_1)$

$$
\begin{aligned}
y_{1,i+1} &= y_{1,i} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
y_{2,i+1} &= y_{2,i} + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \\
k_1 &= h \cdot f_1(x_i,\ y_{1,i},\ y_{2,i}) \\
l_1 &= h \cdot f_2(x_i,\ y_{1,i},\ y_{2,i}) \\
k_2 &= h \cdot f_1\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_{1,i} + \frac{k_1}{2},\ y_{2,i} + \frac{l_1}{2}\right) \\
l_2 &= h \cdot f_2\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_{1,i} + \frac{k_1}{2},\ y_{2,i} + \frac{l_1}{2}\right) \\
k_3 &= h \cdot f_1\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_{1,i} + \frac{k_2}{2},\ y_{2,i} + \frac{l_2}{2}\right) \\
l_3 &= h \cdot f_2\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_{1,i} + \frac{k_2}{2},\ y_{2,i} + \frac{l_2}{2}\right) \\
k_4 &= h \cdot f_1(x_i + h,\ y_{1,i} + k_3,\ y_{2,i} + l_3) \\
l_4 &= h \cdot f_2(x_i + h,\ y_{1,i} + k_3,\ y_{2,i} + l_3)
\end{aligned}
$$

$$i = 0,\ \dots,\ n-1$$

Beispiel: $y_1' = y_1 \cdot y_2 + x \qquad y_1(0) = 1$

$y_2' = x \cdot y_2 + y_1 \qquad y_2(0) = -1$

gesucht: $y_1(0,2) \qquad y_2(0,2)$

Lsg: $h = 0,2 \qquad y_{1,0} = y_1(0) = 1 \qquad y_{2,0} = y_2(0) = -1$

$f_1(x,\ y_1,\ y_2) = y_1 \cdot y_2 + x$

$f_2(x,\ y_1,\ y_2) = x \cdot y_2 + y_1$

x	α	j	$y_1 = y_{1,0} + \alpha \cdot h_{j-1}$	$y_2 = y_{2,0} + \alpha \cdot l_{j-1}$	$k_j = 0,2(y_1 \cdot y_2 + x)$	$l_j = 0,2(x \cdot y_2 + y_1)$
0	0	1	$1 \triangleq (y_{1,0})$	$-1 \triangleq (y_{2,0})$	$-0,2 \triangleq (k_1)$	$0,2 \triangleq (l_1)$
0,1	0,5	2	$0,9 \triangleq (y_{1,0} + 0,5 \cdot k_1)$	$-0,9$	$-0,142$	$0,162$
0,1	0,5	3	0,929	–0,919	–0,1508	0,1674
0,2	1	4	0,8492	–0,8326	–0,1014	0,1365

5.3 Runge-Kutta-Verfahren für DGLen höherer Ordnung

DGL n-ter Ordnung $\xrightarrow{\text{Substitution}}$ Ordnung

$$\boxed{y^{(n)} = f\left(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}\right)} \xrightarrow{\boxed{\begin{array}{l} y = y_1 \\ y' = y_2 \\ y'' = y_3 \\ \vdots \\ y^{(n-1)} = y_n \end{array}}} \boxed{\begin{array}{l} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_n' = f(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n) \end{array}}$$