SEITE 1

DIFFERENTIALRECHNUNG

Regeln				
Regeln	$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$	$(u\cdot v)'=u'v+uv'$	$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$	$(uvw)'=(u'v+uv')w+uvw'=u'vw+uv'w+uvw'$

Ableitungen

y	y'	y	y'	y	y'	y	y'
a	0	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	e^x	e^x	$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$-\sin x$	$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$ $1+\tan^2 x$	$\cot x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$ $-1-\cot^2 x$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arccos x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\cosh x$	$\sinh x$	$\tanh x$	$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$ $1-\tanh^2 x$	$\coth x$	$-\dfrac{1}{\sinh^2 x}$ $1-\coth^2 x$
$\operatorname{arsinh} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arcosh} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{artanh} x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{arcoth} x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$

Diverses

$y=a^x=e^{x\cdot\ln a}=\left(e^{\ln a}\right)^x \quad\Rightarrow\quad y'=e^{x\cdot\ln a}\cdot\ln a=a^x\cdot\ln a$

Mittelwertsatz: $\exists\,\xi$ mit $a\le\xi\le b$, so dass $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Parameterdarstellung
$$\left.\begin{aligned}y&=\psi(t)\\x&=\varphi(t)\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

Polarkoordinaten
$$\left.\begin{aligned}y&=r(\varphi)\cdot\cos\varphi\\x&=r(\varphi)\cdot\sin\varphi\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{r'\cdot\cos\varphi-r\cdot\sin\varphi}{r'\cdot\sin\varphi+r\cdot\cos\varphi}$$

Extrema
ist $f'(x_0)=0$ und $f''(x_0)<0 \quad\Rightarrow\quad x_0$ ist Max
ist $f'(x_0)=0$ und $f''(x_0)>0 \quad\Rightarrow\quad x_0$ ist Min

INTEGRALRECHNUNG

Stamfunktionen

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$\int a\cdot dx$	$ax+c$	$\int x^\alpha\cdot dx$	$\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$\int e^x\cdot dx$	e^x+c	$\int\dfrac{dx}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+c$
$\int\sin x\cdot dx$	$-\cos x+c$	$\int\cos x\cdot dx$	$\sin x+c$	$\int\dfrac{dx}{\cos^2 x}$ $\int(1+\tan^2 x)dx$	$\tan x+c$	$\int\dfrac{dx}{\sin^2 x}$ $\int(1+\cot^2 x)dx$	$-\cos x+c$
$\int\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x+c$ $(-1\le x\le 1)$	$\int\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\arccos x+c$	$\int\dfrac{dx}{1+x^2}$	$\arctan x+c$	$\int\dfrac{dx}{1+x^2}$	$-\operatorname{arccot} x+c$
$\int\sinh x\cdot dx$	$\cosh x+c$	$\int\cosh x\cdot dx$	$\sinh x+c$	$\int\dfrac{dx}{\cosh^2 x}$ $\int(1-\tanh^2 x)dx$	$\tanh x+c$	$\int\dfrac{dx}{\sinh^2 x}$ $\int(\coth^2 x-1)dx$	$-\coth x+c$
$\int\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arsinh} x+c$	$\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arcosh} x+c$	$\int\dfrac{dx}{1-x^2}$	$\operatorname{artanh} x+c$	$\int\dfrac{dx}{1-x^2}$	$\operatorname{arcoth} x+c$

Regeln

Partielle Integration
$$\int u'v\cdot dx=uv-\int uv'dx$$

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}\cdot dx=\ln\lvert f(x)\rvert+c$$

Mittelwertsatz $\quad\exists\,\xi$ mit $a\le\xi\le b$ mit $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$

$$\int_0^\infty e^{-x}\cdot x^n\cdot dx=n! \qquad (n\in\mathbb{N})$$

stetig $\Rightarrow$ integrierbar
differenzierbar $\Rightarrow$ stetig

differenzierbar $\Rightarrow$ integrierbar
integrierbar $\not\Rightarrow$ differenzierbar

stetig $\not\Rightarrow$ differenzierbar

$$\int\ln x\cdot dx=x\cdot(\ln x-1) \qquad \log_b x=\frac{\log_a x}{\log_a b} \qquad a^x=e^{x\cdot\ln a}=\left(e^{\ln a}\right)^x$$

Polynomapproximation nach der Methode der kleinsten Quadrate

Nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimme man zu der folgenden Wertetabelle (Meßreihe) eine Approximationsgerade

x_i	0	1	2	3	4
f_i	$-3{,}00$	$-1{,}02$	$1{,}04$	$3{,}01$	$4{,}95$

$P(x)=c_1+c_2x \quad (m=2)$

i	x_i^0	x_i^1	x_i^2	f_i	$f_i\cdot x_i$
1	1	0	0	-3,00	0
2	1	1	1	-1,02	-1,02
3	1	2	4	1,04	2,08
4	1	3	9	3,01	9,03
5	1	4	16	4,95	19,80
Σ	$a_{11}=5$	$a_{12}=a_{21}=10$	$a_{22}=30$	$b_1=4{,}98$	$b_2=29{,}89$

Normalgleichung
$$\left\{\begin{aligned}a_{11}c_1+a_{12}c_2&=b_1\\a_{21}c_1+a_{22}c_2&=b_2\end{aligned}\right\}$$

$$a_{kl}=\sum_{i=1}^{5}x_i^{k+l-2} \qquad b_k=\sum_{i=1}^{5}f_i\cdot x_i^{k-1} \qquad k,l=1,2$$

Normalengleichungen
$$\begin{aligned}5c_1+10c_2&=4{,}98\\10c_1+30c_2&=29{,}89\end{aligned}$$

$$P(x)=-2{,}99+1{,}99x$$

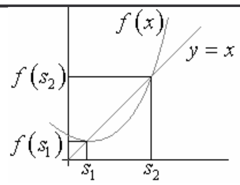
NUMERISCHE METHODE ZUR LÖSUNG VON GLEICHUNGEN

das allgemeine Iterationsverfahren

Fixpunkt

Seien M, N mit $M \in N$ und $f : M \to N$ eine Abbildung.

$x \in y$ heißt Fixpunkt von f, wenn $\boxed{f(x) = x}$



Fixpunkte von $f(x)$
$=$ Schnittpunkte des Graphen von $f(x)$ und $y = x$

Gleichungen $g(x) = 0$ können stets durch äquivalente Umformungen auf die Fixpunktgleichung $f(x) = x$ gebracht werden.

x Nullstelle von $g(x)$ $\Leftrightarrow$ x Fixpunkt von $f(x)$

Kontraktion

Sei $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ eine Abbildung. $f : I \to I$ heißt Abb., wenn ein Konstante $0 \le L \le 1$ existiert,

so dass $\boxed{| f(x) - f(y) | \le L \, | x - y |}$ für alle $x, y \in I$.

L: Lipschitz-Konstante

Kriterium für Kontraktion:
Sei $f : I \to I$ stetig differenzierbar in I mit $\boxed{| f'(x) | \le L < 1}$ für alle $x \in I$,
dann ist f eine Kontraktion mit Lipschitz-Konstante L.

Fixpunktsatz

Sei $f : I \to I$ eine Kontraktion. Es gilt:

(1) f besizt genau einen Fixpunkt $s = f(s)$

(2) Für jeden Startwert $x_0 \in I$ konvergiert die Folge (Iterationsfolge)
$\boxed{x_{k+1} = f(x_k)}$ $\quad k = 0,1,2,\ldots$ gegen den Fixpunkt s.

(3) Es gelten die folgenden Fehlerabschätzungen:

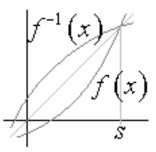
(a) Die A-priori-Fehlerabschätzung (was vorher kommt)

$$\boxed{| x_k - s | \le \frac{L^k}{1-L} | x_1 - x_0 |}$$

(b) Die A-posteriori-Fehlerabschätzung (was nachher kommt)

$$\boxed{| x_k - s | \le \frac{L}{1-L} | x_k - x_{k-1} |}$$

Sei $f : I \to I$ umkehrbar mit $| f'(x) | > 1$ in I



$$\boxed{f(s) = f^{-1}(s)}$$

$$\left| \left(f^{-1} \right)'(x) \right| \underset{\substack{\text{Ableitung für} \\ \text{Umkehrfunktion}}}{=} \frac{1}{\left| f'\left(f^{-1}(x) \right) \right|} < 1 \text{ in } I$$

$\Rightarrow$ Konvergenz für f^{-1}

$\boxed{\text{Im Fall } | f'(x) | > 1 \text{ in } I \text{ wende Iterationsverfahren auf } f^{-1} \text{ an.}}$

Unter der Voraussetzung des Fixpunktes gilt:

$$| x_k - x_{k-1} | \le \varepsilon \frac{1-L}{L} \quad \Rightarrow \quad | x_k - s | < \varepsilon$$

Bestimmung der Iterationsschritte N bei Fehlergrenze ε

$$\boxed{N \ge \frac{\ln\left(\varepsilon (1-L) \right) - \ln | x_1 - x_0 |}{\ln L}}$$

x_0 Startwert
$x_1 = f(x_0)$
f Kontraktion mit Lipschitz $L < 1$

Newton Iterationsverfahren und Regula Falsi

Newtonsche Iterationsfolge (Einzelschrittverfahren):

$$\boxed{x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}} \quad x_0 = \text{Startwert}$$

Wählt man als Startwert $x_0 \in \{a,b\}$ mit $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$, so konvergiert das Newton-Verfahren

Regula Falsi (Zweischritt- und Sekantenverfahren):

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}} \quad x_0, x_1 \text{ Startwert}$$

Konvergenz ist gesichert, wenn stets $\boxed{f(x_n) \cdot f(x_{n+1}) < 0}$,
d.h. wenn $[x_n, x_{n+1}]$ bzw. $[x_{n+1}, x_n]$ Nullstelle enthält.

Nullstellen von Polynomen

Honor-Schema:

	a_0	a_1	a_2	$\ldots$	a_n
$+$	0	$b_0 p$	$b_1 p$	$\ldots$	$b_{n-1} p$
p	b_0	b_1	b_2	$\ldots$	$\boxed{R = P_n(p)}$

Berechnung einfacher Nullstellen von Polynomen nach dem Newton-Verf.:

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{P_n(x_k)}{P_n'(x_k)}}$$

erweitertes Honor-Schema:

	a_0	a_1	a_2	$\ldots$		a_n	
	$\ldots$						
p	b_0	b_1	b_2	$\ldots$	b_{n-1}	$\boxed{P_n(p)}$	
	$\ldots$						
p	c_0	c_1	c_2	$\ldots$	c_{n-2}	$\boxed{P_{n-1}(p) = P_n'(p)}$	$P_{n-1}(x) = b_0 x^{n-1} + \ldots b_{n-1}$
	$\ldots$						
p	d_0	d_1	d_2	$\ldots$	d_{n-3}	$\boxed{P_{n-2}(p) = \frac{1}{2!} \cdot P_n''(p)}$	$P_{n-2}(x) = c_1 x^{n-2} + \ldots c_{n-2}$
	$\ldots$						
$\vdots$							
p	$P_0(p) = \frac{1}{n!} \cdot P_n^{(n)}(p)$						$P_{n-k}(p) = \frac{1}{k!} \cdot P^{(k)}(p)$

$$P_n(x) \underset{\substack{\text{Satz von} \\ \text{Taylor}}}{=} \frac{P_n^{(n)}(p)}{n!} \cdot (x-p)^n + \frac{P_n^{(n-1)}(p)}{(n-1)!} \cdot (x-p)^{n-1} + \ldots P_n(p) = \text{Taylorreihe}$$

Numerische Integration

Man berechne $\int_1^{1,8} \ln x \cdot dx$ mittels $\quad$ (Schrittweite $h = 0,2$)

Sehnentrapezsumme

$$F = {}^{0,2}\!/_{2} \left(\ln 1 + 2 \cdot \ln 1,2 + 2 \cdot \ln 1,4 + 2 \cdot \ln 1,6 + \ln 1,8 \right) = 0,2565$$

Simpsonsumme

$$F = {}^{0,2}\!/_{3} \left(\ln 1 + 4 \cdot \ln 1,2 + 2 \cdot \ln 1,4 + 4 \cdot \ln 1,6 + \ln 1,8 \right) = 0,2580$$

LÖSUNG LINEARER GLEICHUNGSSYSTEME

Austauschverfahren

1. bestimme Pivot
2. Pivot = Pivot^{-1}
3. Kellerzeile:
   Kellerzeilenelement = –Pivotzeilenelement $\cdot$ Pivot^{-1}
4. Pivotzeilenelement = Kellerzeilenelement
5. Pivotspalte:
   Pivotspaltenelement = Pivotspaltenelement $\cdot$ Pivot^{-1}
6. Rest:
   Restelement = Element + Kellerzeilenelement $\cdot$ Pivotspaltenelement

Iterative Methoden zur Lsg von LGS

Gesamtschrittverfahren von Jacobi

$$x_1^{(m+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(m)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(m)}\right)$$

$$x_2^{(m+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(m)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(m)}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(m+1)} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(m)} - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(m)}\right)$$

Einzelschrittverfahren von Gauß-Seidel

$$x_1^{(m+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(m)} - a_{13}x_3^{(m)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(m)}\right)$$

$$x_2^{(m+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(m+1)} - a_{23}x_3^{(m)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(m)}\right)$$

$$x_3^{(m+1)} = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(m+1)} - a_{32}x_2^{(m+1)} - \ldots - a_{3n}x_n^{(m)}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(m+1)} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(m+1)} - a_{32}x_2^{(m+1)} - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(m+1)}\right)$$

Einzelschrittverfahren konvergiert im Allgemeinen besser als das Gesamtschrittverfahren

Das Gesamt- und Einzelschrittverfahren konvergiert, wenn folgendes Zeilensummenkriterium erfüllt ist

$$\sum_{\substack{k=1\\ i\neq k}}^{n} |a_{ik}| < |a_{ii}| \quad {}_{i=1,\ldots n}$$

Verfahrengegenüberstellung

Gauß-Algorithmus	Rundungsfehler, relativ leicht programmierbar (Pivotsuche!), nicht sinnvoll für große LGSe $(n \leq 10)$
Austauschverfahren	Rundungsfehler, Mitberechnung der Inverse, (empfehlenswert, falls Berechnung für verschiedene Zielvektoren), nicht sinnvoll für große n
Cramersche Regel	übermäßiger Rechenaufwand für $n > 3$, (Berechn. der Determinante), sehr empfehlenswert für $n = 2$
Gesamtschrittverfahren	sehr hohe Genauigkeit, unter Umständen keine Konvergenz, (falls nicht diagonaldominant), sehr leicht programmierbar, sinnvoll für große LGSe
Einzelschrittverfahren	sehr hohe Genauigkeit, unter Umständen keine Konvergenz, (falls nicht diagonaldominant), sehr leicht programmierbar, sinnvoll für große LGSe

INTERPOLATION

Lagrange

Lagrange Polynome

Sei $x_0, x_1, \ldots x_n$ Stützstellen. Es existieren eindeutig bestimmte $(n+1)$ Polynome $L_i(x)$ vom Grad n mit

x_k	x_0	x_1	$\ldots$	x_i	$\ldots$	x_n
$L_i(x_k)$	0	0	$\ldots$	1	0	0

$L_i(x_k)$ heißt dann Lagrange - Polynom

Die Lagrange – Polynome sind gegeben durch

$$\boxed{L_i(x_k) = \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}}$$

Lagrange – Interpolation

gegeben sei die Wertetabelle

x_i	x_0	x_1	$\ldots$	x_n
f_i	f_0	f_1	$\ldots$	f_n

und seien $L_i(x)$ $(i = 0, \ldots n)$ die zugehörigen Lagrange - Polynome

Die Funktion

$$\boxed{P(x) = f_0L_0(x) + f_1L_1(x) + \ldots f_nL_n(x)}$$

ist ein Polynom höchstens vom Grad n mit $\underset{k=0,\ldots n}{\boxed{P(x_k) = f_k}}$

Newton

Zu der Wertetabelle

x_i	x_0	x_1	$\ldots$	x_n
f_i	f_0	f_1	$\ldots$	f_n

ist ein Interpolationspolynom $P(x)$ gegeben durch

$$\boxed{P(x) = f_0 \cdot 1 + f_{0,1}(x-x_0) + \ldots f_{0,1,\ldots,n}(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})}$$

Die Koeffizienten $f_{0,\ldots i}$ heißen dividierte Differenzen und lassen sich durch die Rekursionsformel

$$\boxed{f_{i,\ldots k} = \frac{f_{i,\ldots k-1} - f_{i+1,\ldots k}}{x_1 - x_k}} \qquad i < k$$

Newton-Formel

bestimmen.

Bestimmung der $f_{0,\ldots i}$ mit Hilfe des Differenzenschemas (Schema von Newton)

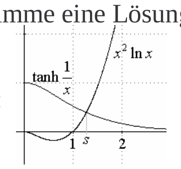
	f_i	1.Stufe	2.Stufe	3.Stufe	$\ldots$	n.Stufe
x_0	f_0					
x_1	f_1	$f_{0,1}$	$f_{0,1,2}$			
x_2	f_2	$f_{1,2}$	$f_{1,2,3}$	$f_{0,\ldots 3}$		
x_3	f_3	$f_{2,3}$			$\vdots$	$f_{0,1,\ldots n}$
$\vdots$	$\vdots$					
x_{n-1}	f_{n-1}		$f_{n-2,n-1,n}$	$f_{n-3,\ldots n}$		
x_n	f_n	$f_{n-1,n}$				

obere Hauptdiagonale wird benötigt

Regula Falsi

Man bestimme eine Lösung von $f(x) = x^2 \ln x - \tanh\frac{1}{x} = 0.$

graphisch:



numerisch: $x_0 = 1,\ x_1 = 2,\quad x_{n+1} = x_n - f(x_n)\dfrac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$

n	2	3	4	5
x_n	1,24790	1,33937	1,36912	1,37837

 SEITE 4

INTERPOLATION (Fortsetzung)

modifiziertes Honor Schema (symbolisch $n = 4$)

$$P(x) = -\frac{19}{120}(x+1)(x-0)(x-1)(x+3) + \frac{1}{24}(x+1)(x-0)(x+1) + \\ + \frac{1}{2}(x+1)(x-0) - 1(x+1) + 1$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
c_4 = -\frac{19}{120} & & c_3 = \frac{1}{24} & & c_2 = \frac{1}{2} & & c_1 = -1 & & c_0 = 1 \\
 & -x_3 = -3 & & -x_2 = -1 & & -x_1 = 0 & & -x_0 = 1 & \\
 & & \frac{19}{40} & & -\frac{31}{60} & & 0 & & -1 \\
\hline
-\frac{19}{120} & & \frac{31}{60} & & -\frac{1}{60} & & -1 & & \boxed{0 = a_0} \\
 & -1 & & 0 & & 1 & & & \\
 & & \frac{19}{120} & & 0 & & -\frac{1}{60} & & \\
\cline{1-7}
-\frac{19}{120} & & \frac{81}{120} & & -\frac{1}{60} & & \boxed{-\frac{61}{60} = a_1} & & \\
 & 0 & & 1 & & & & & \\
 & & 0 & & \frac{81}{120} & & & & \\
\cline{1-5}
-\frac{19}{120} & & \frac{81}{120} & & \boxed{\frac{79}{120} = a_2} & & & & \\
 & 1 & & & & & & & \\
 & & -\frac{19}{120} & & & & & & \\
\cline{1-3}
-\frac{19}{120} & & \boxed{\frac{31}{60} = a_3} & & & & & & \\
\cline{1-1}
\boxed{-\frac{19}{120} = a_4} & & & & & & & &
\end{array}$$

$$P(x) = -\frac{61}{60}x + \frac{79}{120}x^2 + \frac{31}{60}x^3 - \frac{19}{120}x^4$$

$$\underset{\substack{\text{Newton-}\\ \text{form}}}{P(x) =} c_4(x-x_3)(x-x_2)(x-x_1)(x-x_0) + \\ + c_0(x-x_2)(x-x_1)(x-x_0) + \\ + c_2(x-x_1)(x-x_0) + c_1(x-x_0) + c_0$$

$$\to$$

$$\underset{\substack{\text{Normal-}\\ \text{form}}}{P(x) =} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

Anwendung:

(1) In der ersten Zeile beginnend bei $c_4 \cdot (-x_3) + c_3 = 2.$ Element in der 2. Zeile

(2) $(\text{Das Elem}) \cdot (-x_2) + c_2 = 3.$ Elem in der 2. Zeile

(3) fortsetzend bis Ende der Zeile

(4) Die x_i werden in der 2. Zeile um eine Position nach links verschoben

(5) Gleiches Schema bis Ende der Zeile und a_n in der letzten Zeile alleine steht

Spline-Funktion für beliebiges n

x_i	x_0	x_1	$\ldots$	x_{n-1}	x_n
y_i	y_0	y_1	$\ldots$	y_{n-1}	y_n

$$\underset{i=0,\ldots,n-1}{h_i = x_{i+1} - x_i}$$

$$P_i(x) = a_i + b_i(x-x_i) + c_i(x-x_i)^2 + d_i(x-x_i)^3$$

(1) setze $\boxed{a_i = y_i \quad c_0 = 0 \quad c_n = 0}$

$i=0,\ldots,n$

c_n Hilfsgröße

(2) löse für die c_i $(i = 1,\ldots n-1)$ das LGS

$$\boxed{h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} = 3\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right)} \quad i = 1,\ldots n-1$$

Matrixform (Tridiagonal-Matrix - symmetrisch)

$$\begin{pmatrix}
2(h_0 + h_1) & h_1 & & & 0 \\
h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & & \\
 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \\
 & & & \ddots & \vdots \\
 & & & & h_{n-2} \\
0 & & \ldots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1})
\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \\ c_n \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_3 - y_0}{h_0} \\ \frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1} \\ \vdots \\ \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} \end{pmatrix}$$

(3) bestimme

$$\boxed{\begin{aligned} b_i &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{(2c_i + c_{i+1})}{3} h_i \\ d_i &= \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} \end{aligned}} \quad i = 0,\ldots n-1$$

APPROXIMATION

Einführung

diskrete Approximation

$$s = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 = \min$$

r : Residuum

Gauß-Approximation

$$\varepsilon = \int_a^b \left(f(x) - f_{\text{appr}}(x) \right)^2 \mathrm{d}x = \min$$

Tschebyscheff-Approximation

$$\varepsilon = \max_{x \in [a,b]} | f(x) - f_{\text{appr}}(x) | = \min$$

Satz von Weierstraß

Zu jeder stetigen Funktion $f_i [a,b] \to \mathbb{R}$ und jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein Polynom $P(x)$ mit $| f(x) - P(x) | < \varepsilon$ für alle $x \in [a,b]$, d.h. jede stetige Punktion kann mit beliebiger Genauigkeit durch ein Polynom approximiert werden.

Methode der kleinsten Quadrate

Verfahren zur Bestimmung einer Näherungsfunktion Polynom (m - 1) – ten Grades

$$P(x) = c_1 + c_2 x + \ldots c_m x^{m-1} \qquad \boxed{m-1 > n}$$

Die Koeffizienten $c_1, \ldots c_m$ lassen sich bestimmen durch das LGS

$$\begin{aligned} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots a_{1m}c_m &= b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots a_{2m}c_m &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \ldots a_{mm}c_m &= b_m \end{aligned}$$

wobei

$$\boxed{a_{kl} = \sum_{i=1}^{n} x_i^{k+l-2}} \text{ und } \boxed{b_k = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i^{k-1}} \qquad k,l = 1,\ldots m$$

Gauß – Approximation

gegeben: Basisfunktionen $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ und $f \in C[a,b]$

gesucht: Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ der Funktion

$$P(x) = a_0 \cdot \varphi_0(x) + \ldots + a_n \cdot \varphi_n(x),$$

so dass

$$\boxed{\int_a^b \left(f(x) - P(x) \right)^2 \mathrm{d}x = \min}$$

Definition: $\boxed{(f,g) = \int_a^b f(x) \cdot g(x) \mathrm{d}x}$

Die gesuchten Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sind Lösungen des LGS

$$\underbrace{\begin{pmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \ldots & (\varphi_0,\varphi_n) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \ldots & (\varphi_1,\varphi_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_1) & \ldots & (\varphi_n,\varphi_n) \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f,\varphi_0) \\ (f,\varphi_1) \\ \vdots \\ (f,\varphi_n) \end{pmatrix} \qquad \text{Normalgl}$$

det A hießt Gramsche Determinante der Basisfunktionen $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$

NUMERISCHE INTEGRATION

Formeln von Newton – Cotes

$$F = \int_{x_0}^{x_n} P_n(x) \mathrm{d}x = l \cdot \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \cdot f_i \quad , \quad \sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1 \quad , \quad l = x_n - x_0$$

Sehnentrapez $\qquad F = \frac{l}{2}(f_0 + f_1)$

Simpson $\qquad F = \frac{l}{6}(f_0 + 4f_1 + f_2)$

Tangententrapez $\qquad F = l \cdot f_{1/2}$

$3/8$ – Formel $\qquad F = \frac{3}{8}h(f_0 + 3 \cdot f_1 + 3 \cdot f_2 + f_3)$

Integrationsverfahren

Tangententrapezsumme

$$\boxed{F = h \cdot \left(f_{1/2} + f_{3/2} + \ldots + f_{m-1/2} \right)}$$

Riemansche Summe

Sehnentrapezsumme

$$\boxed{F = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{m-1} + f_m \right)}$$

Trapezsumme

Simpsonsumme

$$\boxed{F = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \ldots 4f_{m-1} + f_m \right)}$$

Simpsonsumme

Fehlerabschätzung

Für die Sehentrapezsumme F_1 gilt:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - F_1 = -\frac{b-a}{2} \cdot f''(x) \cdot h^2 \quad \text{für ein } x \in [a,b]$$

und demnach

$$\boxed{\left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - F_1 \right| \le M_1 \cdot h^2 \quad \text{mit } M_1 = \frac{b-a}{2} \max_{x\in[a,b]} | f''(x) |}$$

Fehler geht mit h^2 gegen 0

Für die Simpsonsumme F_2 gilt:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - F_2 = -\frac{b-a}{180} \cdot f^{(4)}(x) \cdot h^4 \quad \text{für ein } x \in [a,b]$$

und demnach

$$\boxed{\left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - F_2 \right| \le M_2 \cdot h^4 \quad \text{mit } M_2 = \frac{b-a}{180} \max_{x\in[a,b]} | f^{(4)}(x) |}$$

Fehler geht mit h^4 gegen 0

Austauschverfahren

	x_1	x_2	x_3
y_1	$\boxed{2}$	2	0
y_2	1	1	2
y_3	2	1	1
	·	−1	0

$\xrightarrow[\substack{x_1 \leftrightarrow y_1 \\ \text{(vgl. 2.3)}}]{\text{Austausch}}$

	y_1	x_2	x_3
x_1	0,5	−1	0
y_2	0,5	0	2
y_3	1	−1	1

$\xrightarrow[\text{Spalte 2 u. 3}]{\text{vertausche}}$

	y_1	x_3	x_2
x_1	0,5	0	−1
y_2	0,5	$\boxed{2}$	0
y_3	1	1	−1
	−0,25	·	0

$\xrightarrow[x_3 \leftrightarrow y_2]{\text{Austausch}}$

	y_1	y_2	x_2
x_1	0,5	0	−1
x_3	−0,25	0,5	0
y_3	0,75	0,5	$\boxed{-1}$
	0,75	0,5	·

$\xrightarrow[x_2 \leftrightarrow y_3]{\text{Austausch}}$

	y_1	x_2	x_3
x_1	−0,25	−0,5	1
x_3	−0,25	0,5	0
x_2	0,75	0,5	−1

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -0,25 & -0,5 & 1 \\ 0,75 & 0,5 & -1 \\ -0,25 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

NUMERISCHE METHODE ZUR LÖSUNG GEWÖHNLICHER DGL

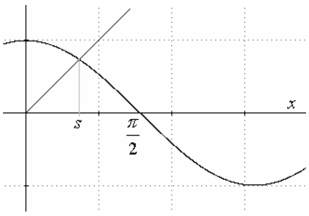
Polynomzug Verf. von Euler	gegeben AWP: $y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$ $h =$ Schrittweite	Der Polynomzug mit den Eckpunkten (x_k, y_k), wobei $\boxed{y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k)}$ y_0 gegeben liefert eine Näherungslösung der exakten Lösung $y(x)$	Bemerkung: Verfahren ungenau
Runge-Kutta 2. Ordnung	gegeben AWP: $y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$ $h =$ Schrittweite Gitterpunkte: $x_n = x_0 + n \cdot h$	Algorithmus zur Bestimmung der Näherungswerte $y_n \approx y(x_n)$ $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} \cdot h(l_1 + l_2)$ $l_1 = f(x_n, y_n)$ $l_2 = f(x_n + h, y_n + h \cdot l_1)$	
Runge-Kutta 4. Ordnung	gegeben AWP: $y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$ $h =$ Schrittweite Gitterpunkte: $x_n = x_0 + n \cdot h$	$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ $k_1 = h \cdot f(x_n, y_n)$ $k_2 = h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$ $k_3 = h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$ $k_4 = h \cdot f(x_n + h, y_n + k_3)$	Schrittweitenanpassung: h optimale Schrittweite, falls $0{,}025 < Q < 0{,}1 \quad$ mit $Q = \left\| \frac{k_3 - k_2}{k_2 - k_1} \right\|$ $Q > 0{,}1$: ungenaue Näherungsw. $\Rightarrow$ SW $= h/2$ letzten Schritt wiederholen $Q < 0{,}025$: Rundungsfehler zu hoch $\Rightarrow$ SW $= 2h$ fortfahren

Differenzen-verfahren	rückwärts genommene Differenz $y_i' \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$	vorwärts genommene Differenz $y_i' \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$	zentrale Differenz $y_i' \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$	$y_i'' \approx \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}$ $y_i''' \approx \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}}{2h^3}$

Das allgemeine Iterationsverfahren

Man bestimme die Fixpunkte von $f(x) = \cos x$

graphisch:



numerisch: $|(\cos x)'| = |\sin x| < 1$ in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Iterationsvorschrift: $\boxed{x_0 = \frac{\pi}{4}, \quad x_k = \cos(x_{k-1})}_{k=1,2,\ldots}$

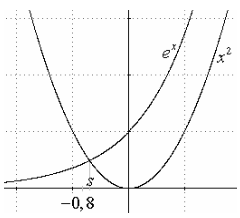
$x_0 = \frac{\pi}{4} = 0{,}785399 \quad x_1 = 0{,}707106 \quad x_2 = 0{,}760245 \quad x_3 = 0{,}724667$

exakter Wert: $0{,}7390851$

Newtonsche Iterationsverfahren

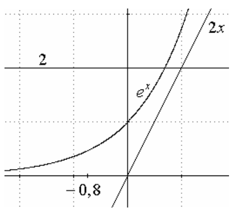
Man bestimme eine Nullstelle $f(x) = e^x - x^2$

graphisch: $e^x - x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x = x^2$



$s =$ Nullstelle von $e^x - x^2$

numerisch:



$f'(x) = e^x - 2x \neq 0$ in $[-0{,}8|0]$

$f''(x) = e^x - 2 \neq 0$ in $[-0{,}8|0]$

$f(-0{,}8) \cdot f''(-0{,}8) = \left(e^x - x^2\right)\left(e^x - 2\right)\Big|_{x_0 = -0{,}8} = 0{,}296 > 0$

$\Rightarrow$ die Folge $\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n} - x_n^{\ 2}}{e^{x_n} - 2x_n}}$

konergiert gegen die Nullst. von $e^x - x^2$.

n	0	1	2	3	4
x_n	$-0{,}8$	$-0{,}706959$	$-0{,}703472$	$-0{,}703467$	$-0{,}703467$

Probe: $f(-0{,}703467) = 0{,}803 \cdot 10^{-6}$

Honer-Schema

Man bestimme alle Lösungen von $P_3(x) = x^3 - 7x^2 + 9x + 5 = 0$.

Lsg: Bestimmen einer Lösung durch Erraten:

$\frac{x\left(x^2 - 7x + 9\right)}{\text{ganze Zahl}} = -5 \qquad \frac{-5}{x} \in \mathbb{Z}$ falls $x \in \mathbb{Z}$

$P_3(1) \neq 0; \quad P_3(-1) \neq 0; \quad P_3(5) = 125 - 175 + 45 + 5 = 0$

Polynomdivision: $\left(x^3 - 7x^2 + 9x + 5\right) : (x - 5) = ?$

	1	−7	9	5
	0	5	10	−5
5	1	−2	−1	0

$x^3 - 7x^2 + 9x + 5 = (x - 5)\left(x^2 - 2x - 1\right) \Rightarrow \begin{cases} \text{Lösungen von } x^2 - 2x - 1: & x_{2/3} = 1 \pm \sqrt{2} \\ \text{Lösungen von } x^3 - 7x^2 + 9x + 5: & x_1 = 5; \quad x_{2/3} = 1 \pm \sqrt{2} \end{cases}$

 SEITE 7

erweitertes Honer-Schema

$P(x)=2x^4-x^3-2x^2+3x-2 \qquad p=-1$

	2	-1	-2	3	-2	
	0	-2	3	-1	-2	
-1	2	-3	1	2	$\lfloor -4$	$=P(-1)$
	0	-2	5	-6		
-1	2	-5	6	$\lfloor -4$	$=P'(-1)$	
	0	-2	7			
-1	2	-7	$\lfloor 13$	$=\frac{1}{2}\cdot P''(-1)$		
	0	-2				
-1	2	$\lfloor -9$	$=\frac{1}{3!}\cdot P'''(-1)$			
	0					
-1	$\lfloor 2$	$=\frac{1}{4!}\cdot P^{(4)}(-1)$				

Taylorreihe von $P(x)$ um $p=-1$

$$P(x)=P(-1)+\frac{P'(-1)}{1!}(x+1)+\ldots\frac{P^{(4)}(-1)}{4!}(x+1)^4$$
$$=-4-4(x+1)+13(x+1)^2-9(x+1)^3+2(x+1)^4$$

Berechnung einfacher Nullstellen nach dem Newton-Verfahren

Man berechne die Näherung $x_0=0{,}95$ einer Nullstelle von $P_3(x)=x^3-x^2-4x+4$ durch einen Newton-Schritt

	1	-1	-4	4	
	0	-0,95	-0,0475	-3,845	
0,95	1	-0,05	-4,0475	$\lfloor 0{,}155$	$=P_3(x_0)$
	0	0,95	0,855		
0,95	1	0,9	$\lfloor -3{,}193$	$=P_3'(x_0)$	

Verbesserte Näherung: $x_1=0{,}95-\dfrac{0{,}155}{-3{,}193}=0{,}999$

GAUSS'sches Eliminationsverfahren

$$\begin{pmatrix}-1&8&3\\2&4&-1\\-2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\left(A\middle|\vec{b}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}-1&8&3&2\\2&4&-1&1\\-2&1&2&-1\end{array}\right)\underset{\substack{\text{2.Zeile=2}\cdot\text{(1.Zeile)}\\\text{3.Zeile=(-2)}\cdot\text{(1.Zeile)}}}{\Rightarrow}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&8&3&2\\0&20&5&5\\0&-15&-4&-5\end{array}\right)\underset{\text{3.Zeile=}\frac{15}{20}\text{(2.Zeile)}}{\Rightarrow}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&8&3&2\\0&20&5&5\\0&0&-\frac{1}{4}&-\frac{5}{4}\end{array}\right)$$

Iterative Methode:

$$\begin{aligned}5x_1+\ x_2+x_3&=1\\x_1+5x_2\qquad&=2\\x_1+\qquad 5x_3&=0\end{aligned}$$

Gesamtschrittverfahren von Jacobi

$$x_1^{(m+1)}=\tfrac{1}{5}\left(1-x_2^{(m)}-x_3^{(m)}\right)$$
$$x_2^{(m+1)}=\tfrac{1}{5}\left(2-x_1^{(m)}\right)$$
$$x_3^{(m+1)}=\tfrac{1}{5}\left(0-x_1^{(m)}\right)$$

Einzelschrittverfahren von GAUß-Seidel

$$x_1^{(m+1)}=\tfrac{1}{5}\left(1-x_2^{(m)}-x_3^{(m)}\right)$$
$$x_2^{(m+1)}=\tfrac{1}{5}\left(2-x_1^{(m+1)}-0\cdot x_3^{(m)}\right)$$
$$x_3^{(m+1)}=\tfrac{1}{5}\left(0-x_1^{(m+1)}-0\cdot x_2^{(m+1)}\right)$$

Lagrange-Polynome

Man bestimme die Lagrange – Polynome für die Stützstellen $x_0=1,\quad x_1=2,\quad x_2=6$

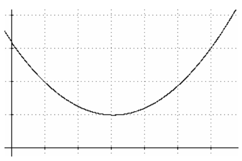
$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x-3)(x-6)}{(1-3)(1-6)}=\frac{1}{10}(x-3)(x-6)$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{(x-1)(x-6)}{(3-1)(3-6)}=\frac{1}{6}(x-1)(x-6)$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{(x-1)(x-3)}{(6-1)(6-3)}=\frac{1}{15}(x-1)(x-3)$$

Lagrange-Interpolation

Man bestimme zu $\begin{array}{c|ccc}x_i&1&3&6\\\hline f_i&2&1&3\end{array}$ das Lagrange – Interpolationspolynom



$$P(x)=2L_0(x)+1L_1(x)+3L_3(x)$$
$$\overset{2.2}{=}2\frac{1}{10}(x-3)(x-6)-\frac{1}{6}(x-1)(x-6)+3\frac{1}{15}(x-1)(x-3)=\frac{7}{30}x^2-\frac{43}{30}x+\frac{16}{5}$$

Probe: $\quad P(1)=2,\quad P(3)=1,\quad P(6)=3$

Newton-Interpolation

x_i	-1	0	1	3	4
f_1	1	0	0	4	-1

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c}x_1&f_i&\text{1.St}&\text{2.St}&\text{3.St}&\text{4.St}\\\hline -1&1&&&&\\&&-1&&&\\0&0&&\frac{1}{2}&&\\&&0&&\frac{1}{24}&\\1&0&&\frac{2}{3}&&-\frac{19}{120}\\&&2&&-\frac{3}{4}&\\3&4&&-\frac{7}{3}&&\\&&-5&&&\\4&-1&&&&\end{array}$$

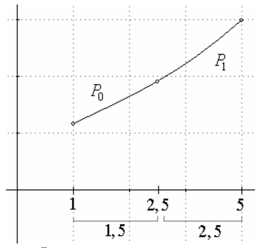
$$P(x)=f_0N_0(x)+f_{0,1}N_1(x)+f_{0,1,2}N_2(x)+$$
$$+f_{0,1,2,3}N_3(x)+f_{0,1,2,3,4}N_4(x)$$
$$=1-1(x+1)+\frac{1}{2}(x+1)(x-0)+\frac{1}{24}(x+1)(x-0)(x-1)-$$
$$-\frac{19}{120}(x+1)(x-0)(x-1)(x-3)$$

SEITE 8

Spline-Interpolation

Man berechne die natürliche kubische Spline-Funktion für die folgende Tabelle:

x_i	1	2,5	5
y_i	1,2	1,9	3



$a_0 = 1,2 \quad a_1 = 1,9 \quad c_0 = 0$

$$c_1 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{1,5+2,5}\right)\left(\frac{3-1,9}{2,5} - \frac{19-1,2}{1,5}\right) = -0,01$$

$$b_0 = \frac{1,9-1.2}{1,5} - \frac{1}{3}(-0,01)\cdot 1,5 = 0,4716$$

$b_1 = 0,456$

$$d_0 = -\frac{0,01}{3\cdot 1,5} = -0,0022 \qquad d_1 = \frac{0,01}{3\cdot 2,5} = 0,0013$$

$$F(x) = \begin{cases} 1,2+0,4716(x-1)-0,0022(x-1)^3, & x\in[1\,|\,2,5] \\ 1,9+0,456(x-2,5)-0,01(x-2,5)^2+0,0013(x-2,5)^3, & x\in[2,5\,|\,5] \end{cases}$$

GAUß-Approximation

Man approximiere $f(x)=\sqrt{x}$ in $[a,b]=\left[\frac{1}{16},1\right]$ durch die Basisfunktionen $\varphi_0 = 1$ und $\varphi_1(x) = x$

Ansatz: $P(x) = a_0\cdot\varphi_0(x) + a_1\cdot\varphi_1(x) = a_0 + a_1\cdot x$

$$\begin{pmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f,\varphi_0) \\ (f,\varphi_1) \end{pmatrix}$$

$$(\varphi_0,\varphi_0) = \int_{\frac{1}{16}}^{1} dx = 0,9375 \qquad (\varphi_1,\varphi_1) = \int_{\frac{1}{16}}^{1} x^2\cdot dx = 0,333252$$

$$(f,\varphi_1) = \int_{\frac{1}{16}}^{1} \sqrt{x}\cdot x\cdot dx = \int_{\frac{1}{16}}^{1} x^{\frac{3}{2}}\cdot dx = 0,399609$$

$$(\varphi_1,\varphi_0) = (\varphi_0,\varphi_1) = \int_{\frac{1}{16}}^{1} x\cdot dx = 0,498047 \qquad (f,\varphi_0) = \int_{\frac{1}{16}}^{1} \sqrt{x}\cdot dx = 0,65620$$

$$\begin{pmatrix} 0,9375 & 0,498047 \\ 0,498047 & 0,333252 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,65620 \\ 0,399609 \end{pmatrix}$$

Lsg: $a_0 = 0,305603 \quad a_1 = 0,742394 \qquad P(x) = 0,305603 + 0,742394x$

Verfahren von Euler

Man bestimmen mit dem Verfahren von Euler eine Näherungslösung des AWP's $y' = y \quad y(0)=1$ im Intervall $[0,1]$. Man wähle als SW $h = 1/16$.

$$y_{k+1} = y_k + h\cdot f(x_k,\, y_k) = y_k + \frac{1}{16}\cdot y_k = \frac{17}{16}\cdot y_k \qquad y_0 = y(0) = 1$$

x_k	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	…	1
y_k	1	?	?	?	…	

x_k	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	…	1
y_k	1	$\frac{17}{16} = 1,0625$	$\left(\frac{17}{16}\right)^2 = 1,1298$	$\left(\frac{17}{16}\right)^3 = 1,1995$	…	$\left(\frac{17}{16}\right)^{16} = 2,63792$
$y(x_k) = e^{x_k}$ exakt	1	1,0644	1,20623	1,20623	…	$e^1 = 2,71828$

Runge-Kutta 2. Ordnung

AWP $\quad y' = y - \dfrac{2x}{y} \quad , \quad y(0) = 1$

Man bestimme einen Näherungswert der Lösung $y(x)$ in 0,2 und 0,4.

x_1	0	0,2	0,4
y_1	1	?	?

$h = 0,2 \quad x_0 = 0 \quad y_0 = 1$

$f(x,y) = y - {}^{2x}\!/_{y}$

$n = 0$: $\quad y_1 = y_0 + \frac{1}{2}\cdot 0,2(l_1 + l_2)$

$l_1 = f(x_0,\, y_0) = f(0,1) = 1$

$l_2 = f(x_0 + h,\, y_0 + h\cdot l_1) = f(0,2\,|\,1,2) = 0,8\overline{6}$

$y_1 = 1 + 0,1(1 + 0,8\overline{6}) = 1,18\overline{6} \approx y(0,2)$

$n = 1$: $\quad y_2 = y_1 + \frac{1}{2}\cdot 0,2(l_1 + l_2)$

$l_1 = f(x_1,\, y_1) = f(0,2\,|\,1,8\overline{6}) = 0,849588$

$l_2 = f(x_1 + h,\, y_1 + h l_1) = f(0,4\,|\,1,18\overline{6} + 0,2\cdot 0,849) = 0,7668$

$y_2 = 1,348313 \approx y(0,4)$