NUMERISCHE INTEGRATION

Lagrangehilfspolynom	Lagrangepolynom	Fehlerterm
$L_{n,\,i}(x) = \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} = \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{x-x_k}{x_i-x_k}$	$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\cdot L_{n,i}(x)$	Satz von Taylor

Newton - Cotes - Formeln

Verfahren	$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx$	$\left\lvert\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right\rvert \leq$
Tagententrapezformel	$h\cdot f_{1/2}$	
Tagententrapezsumme	$h(f_{1/2}+f_{3/2}+\ldots+f_{m-1/2})$	
Sehnentrapezformel	$\frac{h}{2}\,(f(x_0)+f(x_1))$	$\frac{h^3}{12}\max_{x\in[a,\,b]} f''(x)$
Sehnentrapezsumme	$\frac{h}{2}(f_0+2f_1+2f_2+\ldots+2f_{m-1}+f_m)$	$\frac{h^2}{2}(b-a)\max_{x\in[a,b]} f''(x)$
Simpsonformel	$\frac{h}{3}\,(f_0+4f_1+f_2)$	$\frac{h^5}{90}\max_{x\in[a,\,b]} f^{(4)}(x)$
Simpsonsumme	$\frac{h}{3}\,(f_0+4f_1+2f_2+4f_3+2f_4\ldots+4f_{m-1}+f_m)$	$\frac{h^4}{180}(b-a)\max_{x\in[a,\,b]} f^{(4)}(x)$

Romberg Integration

$$\boxed{T_{j,\,k} = \frac{4^k T_{j,\,k-1} - T_{j-1,\,k-1}}{4^k-1}}$$

$$T_{0,\,0} = \frac{l}{2}\,(f(a)+f(b))$$

$$T_{1,\,0} = \frac{1}{2}\left(T_{0,\,0} + l\cdot f\left(a+\frac{l}{2}\right)\right) \qquad T_{1,\,1} = \frac{4\,T_{1,\,0}-T_{0,\,0}}{3}$$

$$T_{2,\,0} = \frac{1}{2}\left(T_{1,\,0} + \frac{l}{2}\left[f\left(a+l\frac{1}{4}\right) + f\left(a+l\frac{3}{4}\right)\right]\right) \qquad T_{2,\,1} = \frac{4\,T_{2,\,0}-T_{1,\,0}}{3} \qquad T_{2,\,2} = \frac{16\,T_{2,\,1}-T_{1,\,1}}{15}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \ddots$$

$$T_{n,\,0} = \frac{1}{2}\left(T_{n-1,\,0} + \frac{b-a}{2^{n-1}}\sum_{\substack{i=1\\ \Delta i=2}}^{2^n-1} f\left(a+i\frac{b-a}{2^n}\right)\right) \qquad T_{n,1} = \frac{4\,T_{n,\,0}-T_{n-1,0}}{3} \qquad T_{n,2} = \frac{16\,T_{n,\,1}-T_{n-1,1}}{15} \qquad \ldots \qquad T_{n\,n} = \frac{4^n\,T_{n,\,n-1}-T_{n-1,\,T_{n-1}}}{4^n-1}$$

Abbruch der Rechnung, wenn der Näherungswert der rechten beiden Spalten der letzten Zeile, bis auf eine vorgegebene Toleranz übereinstimmt.

Monte - Carlo - Methode

Bestimmung von Zufallszahlen im Intervall $[a_j,\,b_j]$

$$x_j^i = a_j + \frac{z^i}{10^n}(b_j-a_j) \qquad \text{mit: } 0 \leq z^i \leq 10^n$$

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx$	$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x_1,\,x_2)\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \approx$	$\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\,\ldots,\,x_n)\mathrm{d}x_1\,\ldots\,\mathrm{d}x_n \approx$
$\frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x^i)$	$\frac{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_1^i,\,x_2^i)$	$\frac{(b_1-a_1)\ldots(b_n-a_n)}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_1^i,\,\ldots,\,x_n^i)$

mit Zufallszahlen $x_j^i \in [a_j,\,b_j]; \quad i = 1,\,\ldots,\,N$

LINEARE OPTIMIERUNG

gegeben:

$z = \vec{c}\cdot\vec{x} = (\max\,|\,\min)$ $\qquad \vec{c} = (c_1,\,\ldots,\,c_n)$

$A\,\vec{x} \leq \vec{b}$ (Bedingung) $\qquad \vec{b} = (b_1,\,\ldots,\,b_m), \quad \vec{a} \leq \vec{b}$

$\vec{x} \geq 0$ $\qquad \vec{x} = (x_1,\,\ldots,\,x_n), \quad A = (a_{ik})\ m\times n-$ Matrix

gesucht:

$z = c_1\,x_1 + c_2\,x_2 + \ldots + c_n\,x_n$

Graphisches Lösungsverfahren

$$a\,x + b\,y = c \quad\Rightarrow\quad \frac{x}{\frac{c}{a}} + \frac{y}{\frac{c}{b}} = 1$$

1. zeichne die Funktionen aller Bedingungen in ein Koordinatensystem
2. zeichne den zulässigen Bereich ein
3. zeichne die Funktion des Maximums (Minimums) ein
4. ein Eckpunkt ist die Lösung
5. löse das GLS der Funktionen am Eckpunkt
6. setze die Lösungen in $z(x,\,y)$ ein

Simplexmethode zur Lösung eines Standard-Maximum-Problems (mit positiver rechten Seite)

gegeben: Standard Maximum Problem

$$
\begin{aligned}
z = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n &= \max \\
a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\
\ldots \qquad\quad \ldots & \\
a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &\leq b_n
\end{aligned}
$$

$$x_k \geq 0,\ k = 1, \ldots, n \qquad b_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, m$$

überführen in kanonische Form:

$$
\begin{aligned}
c_1x_1 + \ldots + c_nx_n - z &= 0 \\
a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} &= b_1 \\
a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n-2} &= b_2 \\
\ldots \qquad\quad \ldots & \\
a_{m1}x_1 + \ldots + a_{m1}x_n + x_{n+m} &= b_m
\end{aligned}
$$

Wahl der Pivotzeile und Pivotspalte

BV	x_{k_1}	x_{k_2}	$\ldots$	x_{k_j}	$\ldots$	x_{k_n}	r.S.	
$x_{k_{n+1}}$	$\tilde{a}_{11}$	$\tilde{a}_{12}$	$\ldots$	$\tilde{a}_{1j}$	$\ldots$	$\tilde{a}_{1n}$	$\tilde{b}_1$	$\frac{\tilde{b}_1}{\tilde{a}_{1j}}$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_{k_{n+i}}$	$\tilde{a}_{i1}$	$\tilde{a}_{i2}$	$\ldots$	$\tilde{a}_{ij}$	$\ldots$	$\tilde{a}_{in}$	$\tilde{b}_i$	$\frac{\tilde{b}_i}{\tilde{a}_{ij}}$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_{k_{n+m}}$	$\tilde{a}_{m1}$	$\tilde{a}_{m2}$	$\ldots$	$\tilde{a}_{mj}$	$\ldots$	$\tilde{a}_{mn}$	$\tilde{b}_m$	$\frac{\tilde{b}_m}{\tilde{a}_{mj}}$
$-z$	$\tilde{c}_1$	$\tilde{c}_2$	$\ldots$	$\tilde{c}_j$	$\ldots$	$\tilde{c}_n$	d	

1. Schritt (Wahl der Pivotspalte):
Wähle Pivotspalte j mit $\tilde{c}_j = \max\limits_{i \leq k \leq n} \tilde{c}_k > 0$

(falls $\tilde{c}_j \leq 0$: fertig)

Bemerkung: Falls $a_{ij} \leq 0$ für $i = 1, \ldots, m$,
so existiert kein Maximum

2. Schritt (Wahl der Pivotzeile):
Wähle Pivotzeile i mit $\frac{\tilde{b}_i}{\tilde{a}_{ij}} = \min\limits_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\tilde{b}_i}{\tilde{a}_{ij}} :\ a_{ij} > 0 \right\}$

Das Austauschverfahren

1. ersetze Pivoelement p durch $\frac{1}{p}$
2. {Kellerzeilenelement} = $\frac{\text{Pivotzeilenelement}}{\text{Pivotelement}}$
3. ersetze Pivotzeile (auch r.S.) durch Kellerzeile (ausgenommen Pivotelement)
4. multipliziere alle Elemente der Pivotspalte (auch c_j) mit $-\frac{1}{p}$
5. {restliche Elemente} = {altes Element} − {Pivotspaltenelement} · {Kellerzeilenelement}

Abbruchbedingung

Tausche solange, bis alle $c_j,\ d \leq 0$

Simplexmethode zur Lösung eines Standard-Maximum-Problems (mit negativer rechten Seite), Standard-Minimum-Problems

gegeben:

$$
\begin{aligned}
z = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n &= \max \\
a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\
\ldots \qquad\quad \ldots & \\
a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &\leq b_n
\end{aligned}
$$

$x_k \geq 0,\ k = 1, \ldots, n$ keine Einschränkung der b_i

Wahl der Pivotzeile und Pivotspalte

1. Pivotzeile: beliebige Zeile mit negativer rechter Seite
2. Pivotspalte: beliebige Spalte mit negativer Zahl
Bemerkung: Falls Pivotzeile keine negative Zahlen enthält, gibt es keine Lösung

Das Austauschverfahren

Siehe oben!

Abbruchbedingung

Vertausche solange, bis sich herausstellt, dass es keine zulässige Lösung gibt, oder ein Simplextableau mit nicht negativer rechten Seite gibt.

NUMERISCHE METHODE ZUR LÖSUNG PARTIELLER DGL'en

Tabellen zur Differentialrechnung

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
a	0	x^a	$a\,x^{a-1}$	e^x	e^x	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$	$cosx$	$-\sin x$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\cot x$	$\frac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\frac{-1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\cosh x$	$\sinh x$	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$	$\coth x$	$\frac{-1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x$
$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{arcoth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Tabellen zur Integralrechnung

$f(x)$	$F(x)-c$	$f(x)$	$F(x)-c$	$f(x)$	$F(x)-c$	$f(x)$	$F(x)-c$
$\int a\,\mathrm{d}x$	$a \cdot x$	$\int x^a\,\mathrm{d}x$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$	e^x	$\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\int \sin x\,\mathrm{d}x$	$-\cos x$	$\int \cos x\,\mathrm{d}x$	$\sin x$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int (1+\tan^2)\,\mathrm{d}x$	$\tan x$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int (1+\cot^2 x)\,\mathrm{d}x$	$-\cos x$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\arccos x$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$	$-\operatorname{arccot} x$
$\int \sinh x\,\mathrm{d}x$	$\cosh x$	$\int \cosh x\,\mathrm{d}x$	$\sinh x$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^2 x} = \int (1-\tanh^2 x)\,\mathrm{d}x$	$\tanh x$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh^2 x} = \int (\coth^2 x - 1)\,\mathrm{d}x$	$-\coth x$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arsinh} x$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arcosh} x$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$	$\operatorname{artanh} x$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$	$\operatorname{arcoth} x$

Lösen von partiellen DGL'en durch Integrationsmethode (Beispiel)

$u_{xy} = 0$	$u_{xy} = \sin x$	$u_{xx} = \mathrm{e}^y$
$u_x = \int u_{xy}(x,\,y)\,\mathrm{d}y + C(x) = C(x)$	$u_x = \int \sin x\,\mathrm{d}y + C(x) = \sin x \cdot y + C(x)$	$u_x = \int \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}x + C(y) = x\,\mathrm{e}^y + C(y)$
$u(x,\,y) = \int u_x(x,\,y)\,\mathrm{d}x + D(y)$	$u = \int \sin x\,y\,\mathrm{d}x + \int C(x)\,\mathrm{d}x + D(y)$	$u = \int x\,\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}x + \int C(y)\,\mathrm{d}x + D(y)$
$= \int C(x)\,\mathrm{d}x + D(y)$	$= (-\cos x)\,y + D(y) + E(x)$	$= \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^y + C(y)\,x + D(y)$

Lösen von partiellen DGL'en durch Methode der Trennung der Variablen (Beispiel)

	$a\,u_x = b\,u_y$	$x\,u_x = y\,u_y$
Produktansatz	$u(x,\,y) = f(x)\,g(y)$	$u(x,\,y) = f(x)\,g(y)$
Einsetzen in die Dgl	$a\,f'(x)\,g(y) = b\,f(x)\,g'(y)$	$x\,f'(x)\,g(y) = y\,f(x)\,g'(y)$
Trennung der Variablen	$\frac{f'(x)}{b\,f(x)} = \frac{g'(y)}{a\,g(y)} = C$	$\frac{x\,f'(x)}{f(x)} = \frac{y\,g'(y)}{g(y)} = C$
Gewöhnliche Dgl'en	$f'(x) - b\,C\,f(x) = 0\;;\quad g'(y) - a\,C\,g(y) = 0$	$f'(x) - \frac{C}{x}f(x) = 0\;;\quad g'(y) - \frac{C}{y}g(y) = 0$
Allg. Lösung der gew. Dgl'en	$f(x) = A\,\mathrm{e}^{b\,C\,x}\;;\quad g(y) = B\,\mathrm{e}^{a\,C\,y}$	$f(x) = A\,\exp(\int \frac{C}{x}\mathrm{d}x) = A\,\mathrm{e}^{C\,\ln x} = A\,x^C\;;\quad g(y) = B\,y^C$
Lösung (keine Allg.)	$u(x,\,y) = A\,B\,\mathrm{e}^{C(b\,x+a\,y)} = K\,\mathrm{e}^{C(b\,x+a\,y)}$	$u(x,\,y) = A\,B(x\,y)^C = K(x\,y)^C$

Annäherung von Ableitungen durch Differenzen

$$y_i' = \left\{\begin{array}{ll} \frac{y_i - y_{i-1}}{h} & \text{rückwärts geno. Differenz} \\ \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} & \text{zentrale Differenz} \\ \frac{y_{i+1} - y_i}{h} & \text{vorwärts geno. Differenz} \end{array}\right\}$$

$$y_i'' = \frac{y_{i+1}' - y_i'}{h} = \frac{\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h}}{h} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

$$y_i''' = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}}{2h^2}$$

Annäherung von partiellen Ableitungen durch Differenzen

$$u_x(x_i,\,y_j) = \left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{h}(u_{ij} - u_{i-1,\,j}) & \text{rückwärts geno. Differenz} \\ \frac{1}{2h}(u_{i+1,\,j} - u_{i-1,\,j}) & \text{zentrale Differenz} \\ \frac{1}{h}(u_{i+1,\,j} - u_{ij}) & \text{vorwärts geno. Differenz} \end{array}\right\}$$

$$u_y(x_i,\,y_j) = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{k}(u_{ij} - u_{i,\,j-1}) \\ \frac{1}{2k}(u_{i,\,j+1} - u_{i,\,j-1}) \\ \frac{1}{k}(u_{i,\,j+1} - u_{ij}) \end{array}\right\}$$

$$u_{xx}(x_i,\,y_j) = \frac{1}{h^2}(u_{i+1,\,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,\,j})$$

$$u_{xy}(x_i,\,y_j) = \frac{1}{4hk}(u_{i+1,\,j+1} - u_{i+1,\,j-1} - u_{i-1,\,j+1} + u_{i-1,\,j-1})$$

$$u_{yy}(x_i,\,y_j) = \frac{1}{k^2}(u_{i,\,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,\,j-1})$$

Cramer'sche Regel

gegeben: $A \cdot \vec{x} = \vec{r}$

$$\Rightarrow \quad x_j = \frac{\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{r}, \ldots, \vec{a}_n)}{\det A}$$

Bemerkung: ideal für $n = 2$

Das Einzelschrittverfahren von Gauß - Seidel

$$\begin{aligned}
x_1^{(m+1)} &= \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - a_{12}\, x_2^{(m)} - a_{13}\, x_3^{(m)} - \ldots - a_{1n}\, x_n^{(m)} \right) \\
x_2^{(m+1)} &= \frac{1}{a_{22}} \left(b_2 - a_{21}\, x_1^{(m+1)} - a_{23}\, x_3^{(m)} - \ldots - a_{2n}\, x_n^{(m)} \right) \\
x_3^{(m+1)} &= \frac{1}{a_{33}} \left(b_3 - a_{31}\, x_1^{(m+1)} - a_{32}\, x_2^{(m+1)} - \ldots - a_{3n}\, x_n^{(m)} \right) \\
&\;\vdots \\
x_n^{(m+1)} &= \frac{1}{a_{nn}} (\ldots)
\end{aligned}$$

mit Startvektor $\vec{x}^{(0)} = \vec{0}$