I GRUNDLAGEN

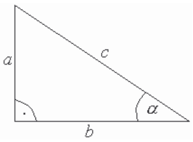
Lineare Algebra

Vektoren
Matrizen
Determinaten
Lineare Gleichungen

Voraussetzungen

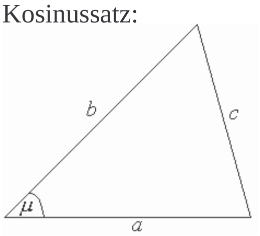
(1) Zahlensysteme (reelle Zahlen)
(2) Algebra
(3) Trigonometrie
(4) Geometrie

zu (3) Trigonometrische Funktionen



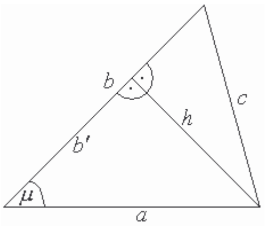
$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \tan\alpha = \frac{a}{b} \qquad \cot\alpha = \frac{b}{a}$

Kosinussatz:



$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\mu$

Bew: $\cos\mu = \frac{b'}{a} \quad \Rightarrow \quad b' = a\cos\mu$



$$c^2 = h^2 + (b-b')^2 = h^2 + (b - a\cos\mu)^2 = h^2 + b^2 + \underbrace{a^2\cos^2\mu}_{b'^2} - 2ab\cos\mu$$

$$= \underbrace{h^2 + b'^2}_{a^2} + b^2 - 2ab\cos\mu = a^2 + b^2 - 2ab\cos\mu$$

II VEKTORRÄUME

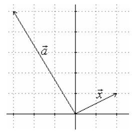
1 Der zweidimensionale Vektorraum

1.1 Vektoren

Def. 1.1

zweidimensionaler Vektor $= \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (a, b \in \mathbb{R}) \quad (a, b$ Koordinaten$)$

Bsp: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ grafische Darstellung



Satz 1.1

(1) Jedem zweidimensionalem Vektor entspricht genau ein Pfeil in der Ebene.
(2) Die Menge der Pfeilspitzen aller zweidimensionalen Vektoren sind die Punkte der unendlich ausgedehnten Ebene.

Anwendung von Vektoren:
Eine technische Meßgröße, die durch ihre Meßzahl eindeutig definiert ist, heißt Skalar. Eine technische Meßgröße, die durch Meßzahl und Richtung definiert ist, ist ein Vektor, der die Richtung anzeigt und die Länge der Maßzahl besitzt.

Bsp:

Temperatur:	Skalar
Kraft:	Vektor
Druck:	Skalar
Geschwindigkeit:	Vektor
Zeit:	Skalar
elek. Feldstärke:	Vektor
elek. Spannung:	Skalar

Def. 1.2

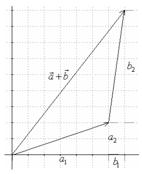
Addition von Vektoren
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

Bsp: $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Satz 1.2

Zwei Vektoren werden addiert, indem man die Vektorpfeile hintereinander legt.

Bew: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$



Def. 1.3

Subtraktion von Vektoren
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$$

Bsp: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Def. 1.4

Nullvektor
$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Def. 1.5

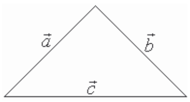
> Vektorbetrag
> $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{x}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Bedeutung des Vektorbetrags: $|\vec{x}| =$ Länge des Vektorpfeiles

Satz 1.3

> (1) $|\vec{x}| =$ Länge des Vektorpfeiles
> (2) $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ (Dreiecksgleichung)

Bew: (2)



Satz 1.4

> $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{b} - \vec{a}|$

Def. 1.6

> Skalarprodukt
> $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$ (Zahl = Skalar)

Bsp: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 8$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} \cdot \vec{x} = a \cdot a + b \cdot b = a^2 + b^2 = \sqrt{a^2 + b^2}^{\,2} = |\vec{x}|^2 = \vec{x} \cdot \vec{x} = \vec{x}^2 \quad \Rightarrow \quad |\vec{x}| = \sqrt{|\vec{x}|^2}$$

Satz 1.5

> (1) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$
> (2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
> (3) $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a}\vec{c} - \vec{b}\vec{c}$
> (4) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2$
> (5) $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2$

Bew: (1)

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = (a_1 + b_1) c_1 + (a_2 + b_2) c_2$$

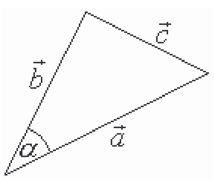
$$= (a_1 c_1 + b_1 c_1) + (a_2 c_2 + b_2 c_2) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$$

(2) bis (5) analog

Satz 1.6

> $\vec{a}, \vec{b}$ schließen Winkel α ein $\quad \Rightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$

Bew:



$\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \vec{c} = \vec{b} - \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{c}^{\,2} = (\vec{b} - \vec{a})^2 = \vec{b}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{a}^2$

Kosinussatz: $|\vec{c}^{\,2}| = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$

$$\left. \begin{array}{l} |\vec{c}|^2 = \vec{c}^{\,2} \\ |\vec{a}|^2 = \vec{a}^2 \\ |\vec{b}|^2 = \vec{b}^2 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \vec{c}^{\,2} = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha = \vec{b} - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{a}^2 \quad \Rightarrow \quad |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

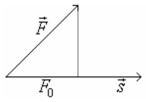
Anmerkung: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Bsp1: Winkel zwischen $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\right|} = \frac{13}{\sqrt{10}\sqrt{17}} = 0{,}99705 \quad\Rightarrow\quad \alpha = 4{,}399°$$

Bsp2: Arbeit = Kraft · Weg

$$\Rightarrow\quad W = F\cdot s$$



$$\cos\alpha = \frac{F_0}{|\vec F|} \quad\Rightarrow\quad F_0 = \vec F\cdot\cos\alpha \quad\Rightarrow\quad W = F_0\cdot|\vec s| = |\vec F||\vec s|\cos\alpha = \vec F\cdot\vec s$$

Bsp3: $\vec a$ senkrecht zu $\vec b$

$$\vec a\cdot\vec b = |\vec a||\vec b|\cos 90° = 0$$

Satz 1.7

$$\boxed{\vec a \text{ senkrecht zu } \vec b \quad\Leftrightarrow\quad \vec a\cdot\vec b = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \vec a \text{ zu } \vec b \text{ orthonogal}}$$

Bsp4: Welcher Vektor steht auf $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ senkrecht und hat die Länge 1?

$$\text{Vektor} = \vec a \qquad \vec a\cdot\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = 0 \qquad |\vec a| = 1$$

(1) $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = 1a_1 + 3a_2 = 0$

(2) $\sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2}} = |\vec a| = 1$

$$\Rightarrow\quad a_1 = -3a_2 \quad\Rightarrow\quad a_1^{\,2} + a_2^{\,2} = (-3a_2)^2 + a_2^{\,2} = 1 \quad\Rightarrow\quad 10a_2^{\,2} = 1 \quad\Rightarrow\quad a_2 = \pm 0{,}316$$

$$\Rightarrow\quad a_1 = -3a_2 = \mp 0{,}948$$

$$a_1 = \begin{pmatrix}-0{,}948\\0{,}316\end{pmatrix} \qquad a_2 = \begin{pmatrix}0{,}948\\-0{,}316\end{pmatrix}$$

1.2 Linear abhängige Vektoren

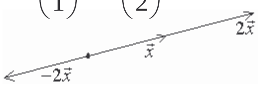
Def. 1.7

> Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar
>
> $a\in\mathbb{R};\quad \vec x = \text{Vektor} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \alpha\cdot\vec x = \begin{pmatrix}\alpha x_1\\\alpha x_2\end{pmatrix}$

Bsp1: $5\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15\\5\end{pmatrix}$

Bsp2: $\begin{pmatrix}24\\12\end{pmatrix} = 12\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$

Bsp3: $\alpha\cdot\vec x$



Satz 1.8

$$\boxed{\vec a = \text{Vektor} \quad\Rightarrow\quad \vec a_0 = \frac{1}{|\vec a|}\cdot\vec a \text{ hat den Betrag 1}}$$

Bew: $|\vec a_0| = \left|\frac{1}{|\vec a|}\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}\frac{a_1}{|\vec a|}\\\frac{a_2}{|\vec a|}\end{pmatrix}\right| = \sqrt{\left(\frac{a_1}{|\vec a|}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{|\vec a|}\right)^2} = \frac{1}{|\vec a|}\cdot\sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2}} = \frac{1}{|\vec a|}\cdot|\vec a| = 1$

Satz 1.9

$r \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow$

(1) $\quad |r \cdot \vec{a}| = |r| \cdot |\vec{a}|$

(2) $\quad |\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \qquad$ (Schwarz'sche Ungleichung)

Bew: (1) $\quad |r \cdot \vec{a}| = |r \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}| = |\begin{pmatrix} ra_1 \\ ra_2 \end{pmatrix}| = \sqrt{(ra_1)^2 + (ra_2)^2} = \sqrt{r^2}\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |r||\vec{a}|$

(2) $\quad |\vec{a} \cdot \vec{b}| = ||\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha| \leq |\vec{a}||\vec{b}||\cos\alpha| \leq |\vec{a}||\vec{b}|$

Def. 1.8

$\vec{x}_1 \neq \vec{0}; \quad \vec{x}_2 \neq \vec{0}$

(1) Zwei Vektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ heißen linear unabhängig,
wenn die Darstellung $\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 = \vec{0}$ nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R})$ möglich ist

(2) Zwei Vektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ heißen linear abhängig,
wenn die Darstellung $\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 = \vec{0}$ für $\lambda_1 \neq \vec{0}, \lambda_2 \neq \vec{0}$ möglich ist

zu (2) linear abhängig

$\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1\vec{x}_1 = -\lambda_2\vec{x}_2$

$\lambda_1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{x}_2 = \alpha\vec{x}_2$

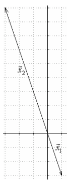
$\Rightarrow \quad \vec{x}_1, \vec{x}_2$ liegen in einer Geraden $\quad \Rightarrow \quad$ linear unabhängig $\quad \Rightarrow \quad$ verschiedene Richtungen

Satz 1.10

(1) Zwei linear abhängige Vektoren liegen in einer Geraden.
(2) Zwei linear unabhängige Vektoren liegen nicht in einer Geraden und zeigen in verschiedene Richtungen.

Bsp: $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix}$

$2\vec{x}_1 + \frac{2}{3}\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$



Def. 1.9

Einheitsvektoren

$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Satz 1.11

$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 = \sum_{j=1}^{2} a_j\vec{e}_j$

Bew: $a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 = a_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \vec{x}$

Satz 1.12

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ und $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix}$ stehen senkrecht auf $\vec{a}$

Bew: $\vec{a} \cdot \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix} = 0$

2 $n-$dimensionale Vektoren

2.1 Grundlagen

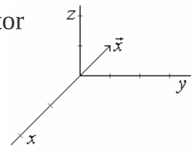
Def. 2.1

> $n-$dimensionaler Vektor
>
> $$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{mit } a_j \in \mathbb{R} \quad (\text{Koordinaten})$$

Bsp: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bsp: dreidimensionaler Vektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Satz 2.1

> Jeder $3-$dimensionaler Vektor ist ein Pfeil in einem $3-$dimensionalen Koordinatensystem (räumliches Koordinatensystem)

Def. 2.2

> Addition und Subtraktion
> Zwei Vektoren werden addiert (subtrahiert), indem sie koordinatenweise addiert (subtrahiert) werden.

Bsp: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Anmerkung: Zwei $3-$dimensionale Vektoren werden addiert, indem man ihre Vektorpfeile hintereinander legt.

Def. 2.3

> Multiplikation mit einem Skalar (Zahl)
> Ein Vektor wird mit einer Zahl multipliziert, indem alle Komponenten mit der Zahl multipliziert werden.

Bsp1: $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ Bsp2: $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Def. 2.4

> Betrag eines Vektors
>
> $$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{x}| = \sqrt{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3^{\ 2} + \ldots x_n^{\ 2}}$$

Satz 2.2

> Bei $2-$ und $3-$dimensionalen Vektoren ist der Vektorbetrag gleich der geometrischen Länge des Vektorpfeiles.

Bsp: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{x}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 9^2} = 9{,}274$ $\quad \left(x^2 + y^2 = l^2 \quad \Rightarrow \quad l^2 + z^2 = \text{Pfeillänge}^2 = x^2 + y^2 + z^2 \right)$

Satz 2.3

$$\boxed{\vec{a} = \text{Vektor} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} \text{ hat den Betrag 1}}$$

Bew:

$$|\vec{a}_0| = \left| \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \frac{a_1}{|\vec{a}|} \\ \frac{a_2}{|\vec{a}|} \\ \\ \frac{a_n}{|\vec{a}|} \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\left(\frac{a_1}{|\vec{a}|}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{|\vec{a}|}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{a_n}{|\vec{a}|}\right)^2} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + \ldots + a_n{}^2} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = 1$$

Anmerkung: $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{b} - \vec{a}| =$ Abstand der Pfeilspitzen von $\vec{a}$ und $\vec{b}$

2.2 Skalarprodukt

Def. 2.5

$$\boxed{\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot b_j}$$

Beispiele:

(1) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} \cdot \vec{y} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 20$

(2) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{x}^2 = \vec{x} \cdot \vec{x} = 3$

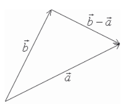
(3) $\vec{x}^2 = |\vec{x}|$ denn $x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 = \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2}^2$

(4) $\Rightarrow \quad |\vec{x}| = \sqrt{\vec{x}^2}$

Satz 2.4

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{a}, \vec{b} \text{ dreidimensionale Vektoren} \\ \alpha = \text{Winkel zwischen } \vec{a} \text{ und } \vec{b} \\ \Rightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha \end{array}}$$

Bew:



$\vec{a} + \left(\vec{b} - \vec{a}\right) = \vec{b}$

$$\left(\vec{b} - \vec{a}\right)^2 = \vec{b}^2 - 2\vec{b}\vec{a} + \vec{a}^2$$

$$\left(\vec{b} - \vec{a}\right)^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2 \underset{\text{Kosinussatz}}{=} |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cdot \cos\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \vec{b}^2 - 2\vec{b}\vec{a} + \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$$

Bsp1: $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$

$$\Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}}{|\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}|\cdot|\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}|} = \frac{3}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{5}} = 0,405 = \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 66,1°$$

Bsp2: $\vec{a}$ senkrecht zu $\vec{b} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 90°$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 90° = 0$$

Satz 2.5

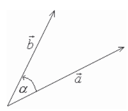
> Zwei 3 – dimensionale Vektoren stehen aufeinander senkrecht genau dann, wenn das Skalarprodukt 0 ist $\left(\vec{a}\text{ zu }\vec{b}\text{ orthogonal}\right)$

Bsp: Man gebe sämtliche Vektoren an, die auf $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ senkrecht stehen.

Alle Vektoren $\vec{b}$ mit $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = 0 = 1\cdot b_1 \quad \Rightarrow \quad b_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{b} = \begin{pmatrix}0\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$

Def. 2.6

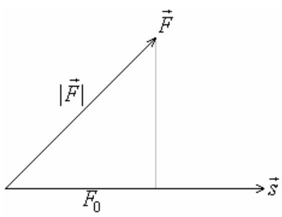
> $\vec{a}, \vec{b}$ n – dimensional
>
> $\vec{a}$ und $\vec{b}$ schließen den Winkel α ein mit $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$



Bsp1: $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\3\\0\\4\end{pmatrix}$

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\0\\4\end{pmatrix}}{|\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}|\cdot|\begin{pmatrix}2\\3\\0\\4\end{pmatrix}|} = \frac{2+6+16}{\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}+\sqrt{2^2+3^2+4^2}} = 0,8134 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 35,54°$$

Bsp2: $\vec{F} = \begin{pmatrix}f_1\\f_2\\f_3\end{pmatrix} = \text{Kraftvektor}, \quad \vec{s} = \begin{pmatrix}s_1\\s_2\\s_3\end{pmatrix} = \text{Weg}$



$$W = F\cdot s = F_0\cdot\text{Weg} = F_0\cdot|\vec{s}|$$

$$\cos\alpha = \frac{F_0}{|\vec{F}|} \quad \Rightarrow \quad F_0 = |\vec{F}|\cdot\cos\alpha$$

$$W = |\vec{F}|\cdot\cos\alpha\cdot|\vec{s}| = |\vec{F}|\cdot|\vec{s}|\cdot\cos\alpha = \vec{F}\cdot\vec{s}$$

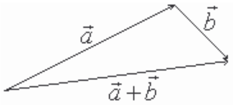
dominik erdmann
ingenieurinformatik
fh – bingen

Satz 2.6

$|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ (Dreiecksungleichung)

$|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ (SCHWARZ'sche Ungleichung)

Bew: (1)



$|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$

(2) $|\vec{a}\cdot\vec{b}| = \left|\left(|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha\right)\right| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\underbrace{\cos\alpha}_{\leq 1}| \leq |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

3 Vektorräume

Def. 3.1

(1)	Die Menge aller n – dimensionalen Vektoren bilden einen n – dimensionalen Vektorraum $\mathbb{R}^n$
(2)	sei $\vec{x}$ n – dimensional $\Leftrightarrow$ $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

Beispiele

(1) $\mathbb{R}^2$ = Menge 2 – dimensionalen Vektoren = Ebene

(2) $\mathbb{R}^3$ = 3 – dimensionaler Raum

(3) $\mathbb{R}^4$

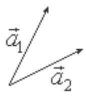
(4) $\mathbb{R}^8$

Def. 3.2

Sei $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots \vec{x}_k \in \mathbb{R}^n$; $\vec{y} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \vec{x}_j \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

wenn die Zahlen λ_j für $j = 1, 2, \ldots k$ alle reellen Zahlen durchlaufen,
bilden die so entstehenden Vektoren $\vec{y}$ eine Unterraum des $\mathbb{R}^n$.
Wenn dieser Unterraum die Dimension $n-1$ hat, heißt er Hyperraum.

Bsp1: $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in \mathbb{R}^3$ $\quad \vec{y} = \sum_{j=1}^{2} \lambda_j \vec{a}_j = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 =$ Hyperebene



Bsp2: $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ $\quad \vec{y} = \lambda \vec{a} \quad (k = 1) \quad$ (= Gerade = Hyperebene)

Bsp3: $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in \mathbb{R}^4$ $\quad \vec{y} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 =$ 3 – dimensionale Unterebene = Hyperebene

Bsp4: $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ $\quad \vec{y} = \lambda \vec{a} \quad (k = 1) \quad$ (= Gerade im Raum $\neq$ Hyperebene)

Def. 3.3

$\vec{a}_1, \vec{a}_2 \qquad \vec{a}_x \in \mathbb{R}^n$

(1)	$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_k$ linear unabhängig $\Leftrightarrow \left[\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \vec{a}_j = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots \lambda_k = 0 \right]$
(2)	$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_k$ linear abhängig $\Leftrightarrow \left[\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \vec{a}_j = \vec{0} \Rightarrow \text{mindestens ein } \lambda_j \neq 0 \right]$

Bsp1: $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in \mathbb{R}^2$ $\quad \lambda_1 \vec{a}_1 + \underbrace{\lambda_2}_{\neq 0} \vec{a}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \vec{a}_1 \Rightarrow \vec{a}_2 = \alpha \vec{a}_1$ (linear abhängig)

Bsp2: $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in \mathbb{R}^3$, linear abhängig

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \vec{0} \underset{\lambda_1 \neq 0}{\Rightarrow} \vec{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{a}_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \vec{a}_3 \Rightarrow \vec{a}_1 = \alpha_1 \vec{a}_2 + \alpha_2 \vec{a}_3 \Rightarrow \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \text{ in Ebene}$$

Satz 3.1

(1)	Linear abhängige Vektoren liegen in einem Unterraum
(2)	Linear unabhängige n – dimensionale Vektoren zeigen in n – verschiedene Richtungen (sie spannen den $\mathbb{R}^n$ auf)

III DETERMINANTEN

1 Zwei- und dreireihige Determinanten

Def. 1.1

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \text{Determinante vom Typ } 2\times 2$$

Bsp: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 2\cdot 7 - 3\cdot 1 = 11$

$\begin{vmatrix} 3,84 & 1,94 \\ -2,71 & 0,09 \end{vmatrix} = 3,84\cdot 0,09 + 1,94\cdot 2,71$

Def. 1.2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \text{Determinante vom Typ } 3\times 3$$

Bsp: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = (28-30) - 2(21-25) + 3(18-20) = 0$

Die Regel von Sarrus

$$\left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{matrix} \underset{\text{Diagonalen aus-multiplizieren}}{=} 1\cdot 4\cdot 7 + 2\cdot 5\cdot 5 + 3\cdot 3\cdot 6 - 3\cdot 4\cdot 5 + 1\cdot 5\cdot 6 - 2\cdot 3\cdot 7$$

Def. 1.3

Streicht man in einer Determinanten die Zeile i und die Spalte k, entsteht eine neue Determinante B_{ik}

$A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot B_{ik}$ = Adjunkte zu a_{ik}

Bsp1: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4 \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 4 \qquad A_{23} = (-1)^{5} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 4$

Bsp2: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 2\cdot(-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$

Satz 1.1

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$$

2 Berechnung $n-$reihiger Determinanten

Def. 2.1

(1)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \text{Determinante vom Typ } n\times n$$

$a_{ik} \quad \Rightarrow \quad$ Zeile Nr.2 & Spalte Nr.4

(2) Streicht man in einer Determinante die Zeile i und Spalte k, entsteht eine $(n-1)-$reihige Determinante B_{ik}.

$A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot B_{ik}$ = Adjunkte zu a_{ik}

Bsp:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \qquad A_{11} = \begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} \qquad A_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 9 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Def. 2.2
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + \dots a_{1n}\cdot A_{1n}$$

Bsp1:
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot A_{11} + 0\cdot A_{12} + 0\cdot A_{13} + 1\cdot A_{14} = A_{11} + A_{14} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (1\cdot A_{11} + 1\cdot A_{12} + 0\cdot A_{13}) - (0\cdot \bar{A}_{11} + 1\cdot \bar{A}_{12} + 1\cdot \bar{A}_{13}) = \left[\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right] - \left[-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\right] = (1-0)-(0+0) = 3$$

Anmerkung:

(1) Def 2.2: Entwicklung der Determinanten nach der ersten Zeile

(2) Eine Determinante darf nach jeder Zeile (Spalte) entwickelt werden (Satz 4.1)

Bsp2:
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 - 10 + 10 = 3$$

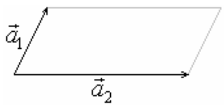
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

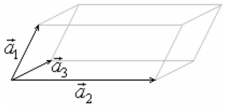
Bsp3: $10\times10-$Determinante $= 10\cdot(9\times9-\text{Det}) = 10\cdot9\cdot(8\times8-\text{Det}) = \dots \quad \Rightarrow \quad \approx 4$ Millionen Operationen

3 Das Spatvolumen

Bsp1: Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in \mathbb{R}^2$, linear unabhängig



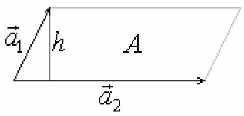
Bsp2: Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in \mathbb{R}^3$, linear unabhängig



Satz 3.1

> Die Fläche des von den Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ aufgespannten Spats (Paralellogramm)
>
> beträgt $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \end{vmatrix}$.

Bew: $A = |\vec{a}_1| \cdot h \underset{\sin\alpha = \frac{h}{|\vec{a}_2|} \;\Rightarrow\; h = \sin\alpha \cdot |\vec{a}_2|}{=} |\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2| \cdot \sin\alpha$



$$A^2 = |\vec{a}_1|^2 \cdot |\vec{a}_2|^2 \cdot \sin^2\alpha \underset{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}{=} \vec{a}_1^{\,2} \cdot \vec{a}_2^{\,2} \cdot \left(1 - \cos^2\alpha\right) = \vec{a}_1^{\,2} \cdot \vec{a}_2^{\,2} - \vec{a}_1^{\,2} \cdot \vec{a}_2^{\,2} \cdot \cos^2\alpha = \vec{a}_1^{\,2} \cdot \vec{a}_2^{\,2} - \left(|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2| \cdot \cos\alpha\right)^2$$

$$= \vec{a}_1^{\,2} \cdot \vec{a}_2^{\,2} - \left(\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2\right)^2 = \left(a_{11}^{\;2} + a_{12}^{\;2}\right)\left(a_{21}^{\;2} + a_{22}^{\;2}\right) - \left(a_{11} \cdot a_{21} + a_{12} \cdot a_{22}\right)^2$$

$$= a_{11}^{\;2} \cdot a_{21}^{\;2} + a_{11}^{\;2} \cdot a_{22}^{\;2} + a_{12}^{\;2} \cdot a_{21}^{\;2} + a_{12}^{\;2} \cdot a_{22}^{\;2} - \left(a_{11}^{\;2} \cdot a_{21}^{\;2} + 2 \cdot a_{11} \cdot a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{22} + a_{12}^{\;2} \cdot a_{22}^{\;2}\right)$$

$$= a_{11}^{\;2} \cdot a_{22}^{\;2} - 2 \cdot a_{11} \cdot a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{22} + a_{12}^{\;2} \cdot a_{21}^{\;2} = \left(a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}\right)^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}^2 = A^2 \quad \Rightarrow \quad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Bsp3: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3$

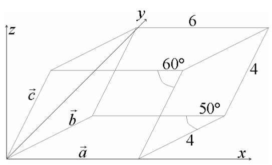
Satz 3.2

> Das Volumen des von den Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ aufgespannten Spats beträgt
>
> $V = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$

Bew: Man drehe das Koordinatensystem so, dass die Vektoren $\vec{a}_1$ & $\vec{a}_2$ in der $x-y-$Ebene liegen:

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ 0 \end{pmatrix}, \; \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad V = \text{Fläche} \cdot \text{Höhe} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot a_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Bsp4:



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \cos 50° = \frac{b_1}{4} \quad \sin 50° = \frac{b_1}{4} \quad \Rightarrow \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} \cos 50° \cdot 4 \\ \sin 50° \cdot 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,571 \\ 3,064 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix} \qquad \cos 60° = \frac{c_1}{4} \quad \sin 60° = \frac{c_3}{4} \quad \Rightarrow \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} \cos 60° \cdot 4 \\ 0 \\ \sin 60° \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3,464 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2,571 & 3,064 & 0 \\ 2 & 0 & 3,464 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 3,064 & 0 \\ 0 & 3,464 \end{vmatrix} = 63,682$$

Def. 3.1

$\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3,\ldots\vec{a}_n \in \mathbb{R}^n$ spannen ein $n-$dimensionalen Spat auf. Es hat das "Volumen":

$$V = \begin{vmatrix} -\vec{a}_1- \\ -\vec{a}_2- \\ \vdots \\ -\vec{a}_n- \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Satz 3.3

$V\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots\vec{a}_n\right) = \text{Spatvolumen} \quad \Rightarrow$

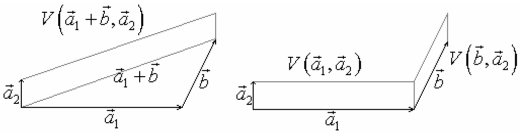
(1) $\quad V\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots\vec{a}_k+\vec{b},\ldots\vec{a}_n\right) = V\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots\vec{a}_n\right) + V\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots\vec{b},\ldots\vec{a}_n\right)$

(2) $\quad V\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots\lambda\cdot\vec{b},\ldots\vec{a}_n\right) = \lambda\cdot V\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots\vec{a}_n\right)$

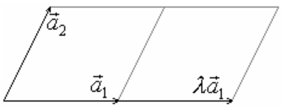
(3) $\quad V\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots\vec{e}_n\right) = 1$

Bew: hier für $n=2$

(1) $\quad V\left(\vec{a}_1+\vec{b},\vec{a}_2\right) = V\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2\right) + V\left(\vec{b},\vec{a}_2\right)$



(2) $\quad V\left(\lambda\vec{a}_1,\vec{a}_2\right) = \lambda\cdot V\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2\right)$



(3) $\quad$ Einheitsquadrat

4 Determinantenregel

Bsp1: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{1. Zeile}}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = -4$

$$\underset{\text{2. Zeile}}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$\underset{\text{3. Zeile}}{=} -1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -4$$

Def. 4.1

> Entwicklung einer Determinate nach einer Zeile (Spalte)
> $= \sum$ der Elemente der Zeile (Spalte), jeweils multipliziert mit ihren Adjunkten.

Satz 4.1

> Den Wert einer Determinaten erhält man,
> wenn man nach einer beliebigen Zeile oder Spalte entwickelt.

Beweisgang:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \text{Entwicklung 1. Zeile} = \sum_{j_1, j_2, \dots j_n} \overbrace{\left(\pm a_{1 j_1} \cdot a_{2 j_2} \cdot \dots a_{n j_n} \right)}^{P}$$

Das Produkt P ensteht, indem man aus jeder Zeile und Spalte genau ein Element nimmt.

Satz 4.2

> Eine Determinate behält ihren Wert,
> wenn man sie an der Hauptdiagonale spiegelt $\left(a_{ik} \text{ durch } a_{ki} \text{ ersetzen}\right)$.

Bew: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Bsp: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$

Satz 4.3

> Eine Determinate mit zwei gleichen Zeilen (Spalten) hat den Wert Null.

Bew: gilt für Spatvolumen

Satz 4.4

> Eine Determinate wird mit einem Faktor multipliziert, indem man alle Elemente einer beliebigen Zeile (Spalte) mit dem Faktor multipliziert.

Bew: Satz 3.3 Spat: $V\left(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \lambda \cdot \vec{b}, \dots \vec{a}_n\right) = \lambda \cdot V\left(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_n\right)$

Bsp: $3 \begin{vmatrix} 1 & 7 & 6 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 15 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 6 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix}$

Satz 4.5

> Addiert man zu einem Zeilenvektor (Spaltenvektor) $\vec{a}$ den Vektor $\vec{b}$, so ist die entstehende Determinate gleich dem Wert der Determinante mit $\vec{a}$ plus dem Wert mit dem Wert der Determinante mit $\vec{b}$.

Bew: Satz 3.3 Spat: $V\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots\vec{a}_k+\vec{b},\dots\vec{a}_n\right)=V\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots\vec{a}_n\right)+V\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots\vec{b},\dots\vec{a}_n\right)$

Bsp1: $\begin{vmatrix} 3 & 7+1 & 4 \\ 6 & 9+2 & 1 \\ 1 & 3+1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 6 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

Bsp2: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\lambda b_1 & a_{22}+\lambda b_2 & a_{23}+\lambda b_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda b_1 & \lambda b_2 & \lambda b_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Satz 4.6

> Sind bei der Determinante die Spaltenvektoren linear abhängig, hat die Determinante den Wert Null.
> Hat eine Determinate den Wert Null, sind die Spaltenvektoren linear abhängig.

Bew: $D = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$

$\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\dots\vec{a}_n$ linear abhängig $\Rightarrow$ $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\dots\vec{a}_n$ liegen in einem Unterraum $\Rightarrow$ Spatvolumen $=0$ $\Leftrightarrow$ $\det=0$

Satz 4.7

> Eine Determinante ist gleich Null genau dann,
> wenn die Spaltenvektoren (Zeilenvektoren) linear abhängig sind.

Bew: Spiegelung an der Hauptdiagonalen

Satz 4.8

> Eine Determinante ist ungleich Null genau dann,
> wenn die Spaltenvektoren (Zeilenvektoren) linear unabhängig sind.

Bew: (1) $\Rightarrow$ linear unabhängig $\Rightarrow$ $\det\neq 0$

indirekt: Annahme $\det=0$ linear abhängig

Widerspruch: Annahme falsch

(2) $\Leftarrow$ $\det\neq 0$ $\Rightarrow$ linear unabhängig

indirekt: Annahme linear abhängig $\Rightarrow$ $\det=0$

Widerspruch: Annahme falsch

Bsp1: Sind die folgenden Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ linear unabhängig, liegen sie nicht in einer Ebene

$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad$ unabhängig

Bsp2: Man beweise: Wenn $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$ $\vec{a},\vec{b},\vec{a}+\vec{b}$ linear abhängig

Bew: $\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vec{a} & \vec{b} & \vec{a}+\vec{b} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vec{a} & \vec{b} & \vec{a} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vec{a} & \vec{b} & \vec{b} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = 0$

Satz 4.9

> Vertauscht man in einer Determinante zwei Zeilen (Spalten) ändert sich ihr Vorzeichen.

Bew: hier 3×3 Determinante

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vec{a} & \vec{b}+\vec{c} & \vec{b}+\vec{c} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vec{a} & \vec{b}+\vec{c} & \vec{b} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vec{a} & \vec{b}+\vec{c} & \vec{c} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vec{a} & \vec{b} & \vec{b} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vec{a} & \vec{c} & \vec{b} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vec{a} & \vec{c} & \vec{c} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vec{a} & \vec{c} & \vec{b} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

Satz 4.10

> Addiert man in einer Determinante das Vielfachen einer anderen Zeile (Spalte), ändert sich ihr Wert nicht.

Bew: hier 3×3 Determinante

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} \text{gegeben} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vec{a} & \vec{b}+\lambda\vec{c} & \vec{c} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vec{a} & \lambda\vec{c} & \vec{c} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} + 0$$

Anwendung

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & 9 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 4 & 7 \\ 25 & 0 & 14 & 29 \\ -54 & 0 & -33 & -59 \\ -5 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ +4\cdot \text{Zeile 1} \\ -9\cdot \text{Zeile 1} \\ -1\cdot \text{Zeile 1} \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 25 & 14 & 29 \\ -54 & -33 & -59 \\ -5 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -120 & -44 & 0 \\ 241 & 85 & 0 \\ -5 & -2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} +29\cdot \text{Zeile 3} \\ -59\cdot \text{Zeile 3} \\ \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -120 & -44 \\ 241 & 85 \end{vmatrix} = 404$$

5 Das Vektorprodukt

Def. 5.1

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \text{Vektorprodukt (Kreuzprodukt)}$$

Bsp1: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-9 \\ 6-4 \\ 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -14 \end{pmatrix}$

Anmerkung:

Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha \in \mathbb{R}$ (inneres Produkt)

Vektorprodukt: $\vec{a} \times \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ (äußeres Produkt)

Satz 5.1

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Bsp2: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \vec{e}_1 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$

Satz 5.2

Spatprodukt

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c} \right) = \begin{vmatrix} \cdots \vec{a} \cdots \\ \cdots \vec{b} \cdots \\ \cdots \vec{c} \cdots \end{vmatrix}$$

Bew: $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c} \right) = \vec{a} \cdot \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ b_1 & b_2 & b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \\ b_1 & b_2 & b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

Satz 5.3

$\vec{a}$ steht senkrecht auf $\vec{a} \times \vec{b}$

$\vec{b}$ steht senkrecht auf $\vec{a} \times \vec{b}$

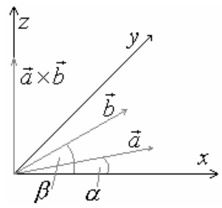
Bew: $\vec{a} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) = \begin{vmatrix} \cdots \vec{a} \cdots \\ \cdots \vec{a} \cdots \\ \cdots \vec{b} \cdots \end{vmatrix} = 0 \qquad \vec{b} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) = \begin{vmatrix} \cdots \vec{b} \cdots \\ \cdots \vec{a} \cdots \\ \cdots \vec{b} \cdots \end{vmatrix} = 0$

Satz 5.4

Die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem (Rechtschraube).

Bew: Man drehe das Koordinatensystem so, dass die Vektoren $\vec{a}_1$ & $\vec{a}_2$ in der $x-y-$Ebene liegen:

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\0\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\0\end{pmatrix}\qquad \vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\end{pmatrix}\qquad \text{gilt: } \tan\alpha<\tan\beta$$



$$\Rightarrow\ \frac{a_2}{a_1}<\frac{b_2}{b_1}\ \Rightarrow\ b_1a_2<a_1b_2\ \Rightarrow\ b_1a_2-a_1b_2>0\ \Rightarrow\ \begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}>0\ \Rightarrow\ z>0\ \underset{\text{Rechtssystem}}{\Rightarrow}\ \vec{a}\times\vec{b}\text{ zeigt nach oben}$$

Satz 5.5

$$\boxed{|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\alpha}$$

Bew: Sei $\vec{u}\perp\vec{a}$, $\vec{u}\perp\vec{b}$ und $|\vec{u}|=1$

$$\vec{u}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\begin{vmatrix}\cdots\vec{u}\cdots\\\cdots\vec{a}\cdots\\\cdots\vec{b}\cdots\end{vmatrix}=\text{Spatvolumen}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\alpha\cdot\underbrace{|\vec{u}|}_{1}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\alpha=|\vec{u}|\cdot|\vec{a}\times\vec{b}|\cdot\cos 0°$$

Anmerkung:

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$

Folgerung:

Satz 5.6

$$\boxed{|\vec{a}\times\vec{b}|\ \text{hat den Wert des Flächeninhaltes des von } \vec{a}\,\&\,\vec{b}\ \text{aufgespannten Parallelogramms.}}$$

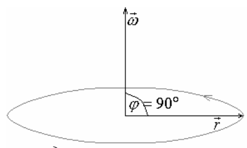
Bew: $A=|\vec{a}|\cdot h \underset{h=|\vec{b}|\cdot\sin\alpha}{=} |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\alpha \underset{\text{Satz 5.6}}{=} \vec{a}\times\vec{b}$

Bsp1: Wie groß ist die Fläche des von den Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ aufgespannten Parallelogramms?

$$A=|\vec{a}\times\vec{b}|=\left|\begin{vmatrix}\vec{e}_1&\vec{e}_2&\vec{e}_3\\1&1&0\\2&1&3\end{vmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix}\right|=\sqrt{3^2+(-3)^2+(-1)^2}=\sqrt{19}=4{,}359$$

Bsp2: Rotierender Körper

Radiusvektor $\vec{r}$ Winkelvektor $\vec{\omega}:\begin{cases}|\vec{\omega}|=\dfrac{2\pi}{T}=2\pi f\\ \text{Richtung } \vec{\omega}=\text{Richtung Drehachse}\end{cases}$



$$v=\frac{2r\pi}{T}=\left|\frac{2\pi}{T}\right|\cdot|\vec{r}|\cdot\underbrace{\sin\varphi}_{1}=|\vec{\omega}|\cdot|\vec{r}|\cdot\sin\varphi=|\vec{\omega}\times\vec{r}|\qquad \left.\begin{matrix}|\vec{v}|=|\vec{\omega}\times\vec{r}|\\ \text{Richtung } \vec{v}=\text{Richtung } \vec{\omega}\times\vec{r}\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ \vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$$

Bsp3: Lorentz-Kraft

$\vec{B}=\mu\cdot\mu_0\cdot H$; Die Ladung q wird senkrecht zu den Feldlinien abgelenkt. Auf q wirkt die Kraft: $\vec{F}=\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot q$

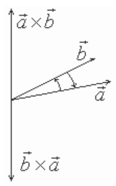
Bsp4: Die Punkte $(0\,|\,1),(1\,|\,4),(3\,|\,2)$ bilden ein Dreieck. $A=?$

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\qquad \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}\qquad A=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\vec{e}_1&\vec{e}_2&\vec{e}_3\\3&1&0\\1&3&0\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot 8=4$$

Satz 5.7

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b}=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)}$$

Bew:



IV MATRIZEN

1 Quadratische Matrizen

Bsp: Gleichungssystem

$$3x+4y=1$$
$$-2x+7y=4$$

Schreibweise: $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Def. 1.1

> Eine Anordnung
>
> $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ heißt $n\times n-$Matrix
>
> $a_{ij} \in \mathbb{R}$ Elemente der Matrix

Bsp: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$ $\quad T=\left(b_{ij}\right)_{i,j=1,2\dots n}$

Def. 1.2

> (1) Die Matrix $\hat{0}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ heißt Nullmatrix
>
> (2) Die Matrix $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ heißt Nullmatrix
>
> (3) Zwei Matrizen heißen gleich, wenn sie elementweise gleich sind.

Bsp: $B=\left(a_{ij}\right)_{i,j=1,2\dots n}$ $\quad B=E \quad\Rightarrow\quad a_{ij}=\begin{cases} 1 \text{ für } i=j=1,2,\dots n \\ 0 \text{ für } i\neq j \end{cases}$

Def. 1.3

> $B=\text{Matrix}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{2n} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \det B=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{2n} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$

Beispiele:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=5$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}=1 \quad\Rightarrow\quad \det E=1$$

Def. 1.4

Multiplikation mit einem Skalar

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha A=\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{21} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \alpha a_{2n} & \dots & \alpha a_{nn} \end{pmatrix}$$

Satz 1.1

$$\det(\alpha A)=\alpha^n\cdot\det A \quad (\alpha\in\mathbb{R})$$

Bew: $$\det(\alpha A)=\begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{21} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \alpha a_{2n} & \dots & \alpha a_{nn} \end{vmatrix}=\alpha\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \alpha a_{2n} & \dots & \alpha a_{nn} \end{vmatrix}=\dots=\alpha^n\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=\alpha^n\cdot\det A$$

Bsp: $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$

Def. 1.5

Zwei Matrizen werden addiert (subtrahiert), indem man sie elementenweise addiert (subtrahiert).

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 13 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -8 & -6 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Anmerkung:
$A=n\times n-$Matrix und $B=n\times n-$Matrix
$A\pm B$ nur möglich, wenn $n=k$

Satz 1.2

$A,B,C \quad n\times n-$Matrizen

$$\alpha,\beta\in\mathbb{R} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned}&(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A\\ &\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B\\ &A+B=B+A\\ &A+(B+C)=(A+B)+C\end{aligned}$$

Bew: $(\alpha+\beta)A=(\alpha+\beta)(a_{ij})_{i,j=1,2,\dots n}=((\alpha+\beta)a_{ij})_{i,j=1,2,\dots n}=(\alpha a_{ij}+\beta a_{ij})_{i,j=1,2,\dots n}=(\alpha a_{ij})_{i,j=1,2,\dots n}+(\beta a_{ij})_{i,j=1,2,\dots n}$

$=\alpha(a_{ij})_{i,j=1,2,\dots n}+\beta(a_{ij})_{i,j=1,2,\dots n}=\alpha A+\beta A$

Rest analog

Satz 1.3

A,B,C Matrizen
(1) $\quad A-B=C \Rightarrow A=C+B$
(2) $\quad A+B=C \Rightarrow A=C-B$

Bew: (1) $\quad A-B=C \Rightarrow (a_{ij})_{i,j=1,2,\dots n}-(b_{ij})_{i,j=1,2,\dots n}=(c_{ij})_{i,j=1,2,\dots n} \Rightarrow (a_{ij}-b_{ij})_{i,j=1,2,\dots n}=(c_{ij})_{i,j=1,2,\dots n}$

$\Rightarrow a_{ij}-b_{ij}=c_{ij} \Rightarrow a_{ij}=b_{ij}+c_{ij} \Rightarrow (a_{ij})_{i,j=1,2,\dots n}=(b_{ij}+c_{if})_{i,j=1,2,\dots n}=(b_{ij})_{i,j=1,2,\dots n}+(c_{ij})_{i,j=1,2,\dots n}$

$\Rightarrow A=B+C$

(2) analog

2 Multiplikation mit Vektoren und Matrizen

Def. 2.1

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad \vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad A\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\cdot x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\cdot x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\cdot x_j \end{pmatrix}$$

Bsp1: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot1+1\cdot2+3\cdot3 \\ 1\cdot1+0\cdot2+4\cdot3 \\ (-1)\cdot1+2\cdot2+1\cdot3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 \\ 13 \\ 6 \end{pmatrix}$

Bsp2: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Merkregel:
Eine Matrix wird mit einem Vektor multipliziert, indem man die Zeilenvektoren der Matrix skalar mit dem Vektor multipliziert.

Bsp: Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_1+4x_2+7x_3-8x_4&=1 \\ 9x_1+2x_2+3x_3-x_4&=2 \\ 8x_1-2x_2+5x_3-8x_4&=1 \\ 9x_1-x_2+6x_3-4x_4&=4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 & -8 \\ 9 & 2 & 3 & -1 \\ 8 & -2 & 5 & -8 \\ 9 & -1 & 6 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A\cdot\vec{s}=\vec{r}$$

Satz 2.1

(1) $E\cdot\vec{x}=\vec{x}$
(2) $\hat{0}\cdot\vec{x}=\vec{0}$
(3) $A\cdot(\vec{x}+\vec{y})=A\vec{x}+A\vec{y}$
(4) $(A+B)\vec{x}=A\vec{x}+B\vec{x}$

Bew: (1) $E\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

(2) $\hat{0}\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\vec{0}$

(3) $A(\vec{x}+\vec{y})=(a_{ij})\left[(x_i)+(y_i)\right]=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j+y_j)=\left(\sum_j a_{ij}\cdot x_j+\sum_j a_{ij}\cdot y_j\right)=\left(\sum_j a_{ij}\cdot x_j\right)+\left(\sum_j a_{ij}\cdot y_j\right)=A\vec{x}+A\vec{y}$

(4) analog

Anmerkung:
$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ $\quad A,B$ Matrizen
$\Rightarrow \quad A(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})=\alpha A\vec{x}+\beta A\vec{y}$
$\Rightarrow \quad (\alpha A+\beta B)\vec{x}=\alpha A\vec{x}+\alpha B\vec{x}$

Def. 2.2

Multiplikation zweier Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{2n} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \text{ mit } C_{ik} = \sum_{m=1}^{n} a_{im} \cdot b_{mk}$$

Bsp1: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2+1\cdot 1 & 2\cdot 2+1\cdot 4 \\ 1\cdot 2+3\cdot 1 & 1\cdot 2+3\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 5 & 14 \end{pmatrix}$

Bsp2: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 13 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

Bsp3: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^2 = A \cdot A = ? \quad \Rightarrow \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Bsp4: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad \Rightarrow \quad e^A = E + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \dots$

Bsp5: $5 \cdot 4 = 4 \cdot 5$ Kommutativgesetz

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ Kommutativgesetz

gilt: $A \cdot B = B \cdot A$?

Satz 2.2

Das Kommutativgesetz gilt nicht für die Matrizenmultiplikation.

Bew: $\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 13 \\ 22 & 29 \end{pmatrix} \right] \neq \left[\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 16 \\ 19 & 28 \end{pmatrix} \right]$

Satz 2.3

$A(B+C) = AB + AC$ Distributivgesetz

$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ Assoziativgesetz

Bew: nachrechnen

Satz 2.4

E = Einheitsmatrix

(1) $A \cdot E = E \cdot A = A$

(2) $E \cdot E = E$

(3) $E^n = E \quad (n \in \mathbb{N})$

Bew: (1)

$$A \cdot E = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = A$$

$$E \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = A$$

(2) $A \cdot E \quad \Rightarrow \quad E \cdot E = E$

(3) $E^2 = E \cdot E = E$

$E^3 = E^2 \cdot E = E \cdot E = E$

$E^4 = E^2 \cdot E^2 = E \cdot E = E$ usw.

Bsp: Es sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Gesucht ist eine Matrix X, so dass $A \cdot X = B$ ist.

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad A \cdot X = B \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r|l} c = 1 & a = 2 \\ d = 2 & b = 1 \end{array}$$

Satz 2.5

$$\boxed{\begin{array}{l} A, B \text{ Matrizen}, \quad \vec{x} = \text{Vektor} \\ \Rightarrow \quad A(B\vec{x}) = (AB)\vec{x} \end{array}}$$

Bew: $B\vec{x} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} b_{jk} x_k \\ \vdots \end{pmatrix}$

$$A \cdot (B\vec{x}) = \left(\sum_j a_{ij} \cdot \sum_k b_{ik} x_k \right) = \left(\sum_j \sum_k a_{ij} b_{jk} x_k \right)$$

$$(A \cdot B)\,\vec{x} = \left(\sum_j \sum_k a_{ij} b_{jk} \right) (x_k) = \left(\sum_j \sum_k a_{ij} b_{jk} x_k \right) \text{ oder nachrechnen}$$

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

3 Der Produktsatz für Determinanten

Problem: gegeben: Matrizen A, B

gesucht: $\det(A \cdot B)$

(a) Wiederholung: Determinantensätze

(1) $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots \\ \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix}$ mit $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} \vec{a}+\vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{c} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b}+\vec{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{c} \end{vmatrix}$ (III, Satz 4.5)

(3) $\begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{a} \end{vmatrix}$ (III, Satz 4.9)

(4) $\begin{vmatrix} \alpha\vec{a} & \vec{b} \end{vmatrix} = \alpha\begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} \vec{a} & \beta\vec{b} \end{vmatrix} = \beta\begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{vmatrix}$ (III, Satz 4.4)

(5) $\begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{a} \end{vmatrix} = 0$ (III, Satz 4.6)

(b) Herleitung des Determinantensatzes $(\text{hier } n = 2)$

$$C = A \cdot B \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} + b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \left(b_{11}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + b_{21}\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \quad b_{12}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + b_{22}\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} b_{11}\vec{a}_1 + b_{21}\vec{a}_2 & b_{12}\vec{a}_1 + b_{22}\vec{a}_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A \cdot B) = \begin{vmatrix} b_{11}\vec{a}_1 + b_{21}\vec{a}_2 & b_{12}\vec{a}_1 + b_{22}\vec{a}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11}\vec{a}_1 & b_{12}\vec{a}_1 + b_{22}\vec{a}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{21}\vec{a}_2 & b_{12}\vec{a}_1 + b_{22}\vec{a}_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_{11}\vec{a}_1 & b_{12}\vec{a}_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11}\vec{a}_1 & b_{22}\vec{a}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{21}\vec{a}_2 & b_{12}\vec{a}_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{21}\vec{a}_2 & b_{22}\vec{a}_2 \end{vmatrix}$$

$$= b_{11}b_{12}\begin{vmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_1 \end{vmatrix} + b_{11}b_{22}\begin{vmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \end{vmatrix} + b_{21}b_{12}\begin{vmatrix} \vec{a}_2 & \vec{a}_1 \end{vmatrix} + b_{21}b_{22}\begin{vmatrix} \vec{a}_2 & \vec{a}_2 \end{vmatrix} = b_{11}b_{22}\begin{vmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \end{vmatrix} - b_{21}b_{12}\begin{vmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \end{vmatrix}$$

$$= (b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12})\begin{vmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \cdot \det A = \det B \cdot \det A = \det(A \cdot B)$$

Satz 3.1 $\boxed{\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B}$

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 3 \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = -1 \Rightarrow \det A \cdot \det B = -3$

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A \cdot B) = -3$

Satz 3.2 $\boxed{\det A^n = (\det A)^n}$

Bew: $n = 2 \qquad \det A^2 = \det(A \cdot A) = \det(A \cdot A) = \det A \cdot \det A = (\det A)^2$

$n = 3 \qquad \det A^3 = \det(A^2 \cdot A) = \det A^2 \cdot \det A = (\det A)^2 \cdot \det A = (\det A)^3$

…

4 Die Inverse einer Matrix

4.1 Grundlagen

Bsp: Gleichungssystem: $x+2y=2$
$3x+4y=3$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix}-2&1\\1,5&-0,5\end{pmatrix}}_{\text{Inverse}}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\1,5&-0,5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1,5\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1,5\end{pmatrix} \Rightarrow \text{Lösung}=\begin{cases}x=-1\\y=1,5\end{cases}$$

Def. 4.1

> A, X Matrizen $\quad E$ Einheitsmatrix
> $X\cdot A=E \Leftrightarrow X=$ Inverse zu A
> $X=A^{-1}$
> Folgerung: $A^{-1}\cdot A=E$

Bsp: Berechnung der Inversen von $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$

$$A^{-1}\cdot A=E \qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}2a+b&a+2b\\2c+d&c+2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}2a+b=1\\a+2b=0\\2c+d=0\\c+2d=1\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll}a=\frac{2}{3} & c=-\frac{1}{3}\\ b=-\frac{1}{3} & d=\frac{2}{3}\end{array}\right. \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$$

Probe:

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Satz 4.1

$$\boxed{A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E}$$

Bew: $A\cdot A^{-1}=X \Rightarrow (A\cdot A^{-1})\cdot A^{-1}=X\cdot A^{-1} \Rightarrow E\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot X \Rightarrow A^{-1}=A^{-1}\cdot X \Rightarrow X=E$

Satz 4.2

$$\boxed{\det A\neq 0 \Rightarrow \det A^{-1}=\frac{1}{\det A}}$$

Bew: $A\cdot A^{-1}=E \Rightarrow \det(A\cdot A^{-1})=\det E=1 \Rightarrow \det(A\cdot A^{-1})=\det A\cdot\det A^{-1}=1 \Rightarrow \det A^{-1}=\frac{1}{\det A}$

Bsp: Gleichungssystem

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=r_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=r_2$$
$$\ldots$$
$$a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=r_n$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\ldots&a_{n1}\\a_{21}&a_{22}&\ldots&a_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\ldots&a_{nn}\end{pmatrix} \Rightarrow A\cdot\vec{x}=\vec{r} \Rightarrow \underbrace{(A^{-1}\cdot A)}_{E}\cdot\vec{x}=A^{-1}\cdot\vec{r} \Rightarrow \vec{x}=A^{-1}\cdot\vec{r}$$

Zusammenfassung:

$A\vec{x} = \vec{r} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{r}$

Satz 4.3

Nicht jede Matrix besitzt eine Inverse.

Bew: $\hat{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Satz 4.4

A^{-1} existiert zu $A \quad \Rightarrow \quad \det A \neq 0$

Bew: A^{-1} existiert $\quad \Rightarrow \quad \det A \cdot \det A^{-1} = \det\left(A \cdot A^{-1}\right) = \det E = 1 \quad \Rightarrow \quad \det A \neq 0$

4.2 Berechnung der Inversen durch Adjunkten

Wiederholung:

(1) gegeben: Determinante $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

A_{ik} = Adjunkten zu $a_{ik} \quad \Leftrightarrow \quad A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot D_{ik}$, wobei D_{ik} durch streichen der Zeilen i und Spalte k in der Determinante A

Bsp: $A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 9 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -27$$

$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6$$

(2) $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} \det A &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} \\ &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + \dots + a_{2n}A_{2n} \\ &= \dots \\ &= a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + \dots + a_{nn}A_{nn} \end{aligned}\right\} \text{ III, Satz 4.1}$$

Satz 4.5

Multipliziert man die Elemente einer Zeile (Spalte) mit ihren Adjunkten und summiert die Produkte, erhält man den Wert der Determinaten.

Bsp: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 7 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 0 - 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 51$

Satz 4.6

Multipliziert man die Elemente einer Zeile mit den Adjunkten einer anderen Zeile und summiert die Produkte, ist das Ergebnis Null.

Bew: Sei $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$$\left(\text{Zeile 2}\right)\times\left(\text{Adjunkte Ziele 1}\right)=a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13}+\ldots+a_{2n}A_{1n}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}=0$$

analog andere Kombinationen

Bsp: $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \underset{(\text{Zeile 3})\times(\text{Adjunkte Zeile 2})}{=} 0\cdot(-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=0+6-6=0$$

Satz 4.7

$$\boxed{\begin{array}{l} A=\text{Matrix}=\left(a_{ij}\right) \qquad A_{ij}=\text{Adjunkte zu } a_{ij} \\ \Rightarrow\quad A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \vdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \vdots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \vdots & A_{nn} \end{pmatrix} \end{array}}$$

Bew: zeigen: $A\cdot A^{-1}=E$

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \vdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \vdots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \vdots & A_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Bsp: $$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ -4 & 1 & 9 \end{pmatrix} \qquad A^{-1}=?$$

$A_{11}=2 \quad A_{12}=-28 \quad A_{13}=4 \quad A_{21}=-6 \quad A_{22}=30 \quad A_{23}=-6 \quad A_{31}=4 \quad A_{32}=-14 \quad A_{33}=2$

$\det A=2\cdot A_{11}+1\cdot A_{12}+3\cdot A_{13}=-12$

$$A^{-1}=-\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ -28 & 30 & -14 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Bsp: Man löse das folgende Gleichungssystem

$$\begin{array}{l} ax+by=r \\ cx+dy=s \end{array} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}\underset{\text{NB}}{=}\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Nebenrechnung: $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad x=\frac{dr-bs}{ad-bc} \qquad y=\frac{cr-as}{ad-bc}$$

Satz 4.8

$$\boxed{\begin{array}{l} A=\text{Matrix} \\ A^{-1}\text{ existiert} \quad\Leftrightarrow\quad \det A\neq 0 \end{array}}$$

Bew: $$A^{-1}\text{ existiert} \quad\Leftrightarrow\quad A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & \vdots & A_{n1} \\ \ldots & & \ldots \\ A_{1n} & \vdots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \det A\neq 0$$

Folgerung:

$\det A=0 \quad\Leftrightarrow\quad$ es gibt keine Inverse

5 Nichtquadratische Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} = \text{nicht quatradisch vom Typ } (k,n), \text{ falls } k \neq n$$

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{x}$

Def. 5.1

> (1) Zwei Matrizen vom gleichen Typ werden addiert (subtrahiert), indem sie elementweise addiert (subtrahiert) werden.
> (2) Eine Matrix wird mit einer Zahl α multipliziert, indem jedes Element mit α multipliziert wird.

Def. 5.2

> Matrix $\times$ Vektor
> Eine Matrix wird mit einem Vektro multipliziert, indem die Elemente einer Zeile der Matrix skalar mit dem Vektor multipliziert werden.

Bsp1: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Bsp2: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ 4 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}$

Anmerkung:

(1) Eine Matrix vom Typ (k,n) überführt einen n – dimensionalen Vektor k – dimensionalen Vektor.

(2) Eine nichtquadratische Matrix besitzt keine Determinante.

Bsp3: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = (8)$

Def. 5.4

> Multiplikation von Matrizen
> Zwei Matrizen werden miteinander multipliziert, indem man jeweils eine Zeile aus der ersten Matrix mit der Spalte aus der zweiten Matrix skalar multipliziert.

Bsp4: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 23 \\ 32 & 25 \end{pmatrix}$

Folgerung:

Eine Matrix vom Typ (k,n) kann nur mit einer Matrik vom Typ (n,k) multipliziert werden.

Es entsteht eine quadratische Matrix vom Typ (k,k).

V LINEARE GLEICHUNGSSYTEME

1 Definition und Lösbarkeit

Def. 1.1

> Ein Gleichungssystem der Form
> $$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n = r_1$$
> $$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n = r_2$$
> $$\vdots$$
> $$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nn}x_n = r_n$$
> heißt lineares Gleichungssystem. Dabei sind die Unbekannten $x_1, x_2, \ldots x_n$ zu bestimmen.
> Das Gleichungssystem heißt homogen, wenn alle Zahlen $r_j = 0 \; (j = 1, 2, \ldots n)$ sind, andernfalls heißt es inhomogen.

Bsp1: inhomogen

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Bsp2: homogen

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x - y - z &= 0 \\ y + z &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Satz 1.1

> Jedes lineare Gleichungssystem ist darstellbar durch $A \cdot \vec{x} = \vec{r}$
> $A =$ Matrix
> $\vec{r} =$ Lösungsvektor
> $\vec{r} = \vec{0} \iff$ homogen
> $\vec{r} \neq \vec{0} \iff$ inhomogen

Bsp3:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1^2 & + & x_2^2 & + & x_3^2 & + & x_4^2 & = & 0 \\ x_1^2 & - & 2x_2^2 & + & x_3^2 & - & 5x_4^2 & = & 1 \\ 3x_1^2 & + & x_2^2 & + & 4x_3^2 & - & x_4^2 & = & 0 \\ -2x_1^2 & + & x_2^2 & - & 3x_3^2 & - & x_4^2 & = & 0 \end{array}\right\} \text{nicht lineares Gleichungssystem}$$

Existenz von Lösungen

(1)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= 0,5 \end{aligned} \qquad \text{einzige Lösung: } \begin{bmatrix} x_1 = 0,75 \\ x_2 = 0,25 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 0,75 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

(2)
$$\begin{aligned} x_1 - 0,5x_2 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{Lösungen: } \begin{bmatrix} x_1 = a \\ x_2 = 2a \end{bmatrix} \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & -0,5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \infty \text{ viele Lösungen}$$

(3)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned} \qquad \text{keine Lösung}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{keine Lösung}$$

Anmerkung:
Bei einem linearen Gleichungssystem gibt es für die Lösung folgende Möglichkeiten:
1. eindeutige Lösung
2. unendliche viele Lösungen
3. keine Lösung

2 Lineare homogene Gleichungssysteme

Def. 2.1

$$\boxed{\begin{array}{l} A = \text{Matrix (quadratisch)} \\ A \cdot \vec{x} = \vec{0} \quad : \quad \text{lineares homogenes GLS} \\ \vec{x} = \text{Lösungsvektor} \end{array}}$$

Satz 2.1

$$\boxed{A \cdot \vec{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \vec{0} \text{ ist Lösungsvektor (triviale Lösung)}}$$

Bew: $A \cdot \vec{0} = \vec{0}$

Bsp1: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x = 0 \\ y = 0 \end{bmatrix}$ (nur triviale Lösung)

Bsp2: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x = 0 \\ y = 0 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} x = 1 \\ y = -1 \end{bmatrix}$

Satz 2.2

$$\boxed{\begin{array}{l} A \cdot \vec{x} = \vec{0} \\ \vec{x} = \vec{0} \text{ einziger Lösungsvektor} \quad \Leftrightarrow \quad \det A \neq 0 \end{array}}$$

Bew: (1) $\Leftarrow$: $\det A \neq 0 \underset{\text{IV, Satz 4.8}}{\Rightarrow} A^{-1}$ existiert $\Rightarrow \left[A\vec{x} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{0} = \vec{0} \right]$

(2) $\Rightarrow$: $\begin{bmatrix} \text{Vorbedingung:} & \vec{x} = \vec{0} \text{ einzige Lösung} \\ \text{Behauptung:} & \det A \neq 0 \end{bmatrix} \leftarrow$ zeigen

Indirekter Beweis:

Annahme: $\det A = 0 \quad \Rightarrow$ Spaltenvektoren von A linear abhängig

sei $A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \ldots & \vec{a}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$ $\quad (\vec{a}_j = \text{Spaltenvektoren})$

$$A \cdot \vec{x} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \ldots & \vec{a}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_1 \cdot x_1 + \vec{a}_2 \cdot x_2 + \ldots \vec{a}_n \cdot x_n = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ min. ein $x_j \neq 0$ (da $\vec{a}_j$ abhängig) $\Rightarrow \vec{x} \neq \vec{0} \Rightarrow$ Lösung $\neq \vec{0}$ existiert, Widerspruch zur Vor.

Satz 2.3

$$\boxed{A \cdot \vec{x} = \vec{0}, \quad \det A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{es existiert eine Lösung } \vec{x} \neq \vec{0}}$$

Bew: $\det A \neq 0 \quad \Leftrightarrow$ es existiert nur $\vec{x} = \vec{0}$ (Satz 2.2)

$\det A = 0 \quad \Leftrightarrow$ es existiert ein $\vec{x} \neq \vec{0}$ (außer $\vec{x} = \vec{0}$)

Bsp3: $\begin{array}{r} 3x + 4y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 6x + 8y + 2z = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 6 & 8 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \det = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}$ und $\begin{array}{l} x = -5 \\ y = 2 \\ z = 7 \end{array}$

Bsp4: $\begin{array}{r} 2x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{array} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = y = 0$ einzige Lösung

Satz 2.4

$$\boxed{A \cdot \vec{x} = \vec{0}, \quad \det A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{es gibt unendlich viele Lösungen } \neq \vec{0}}$$

Bew: $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ mit $\vec{x} \neq \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda \cdot A \cdot \vec{x} = \lambda \vec{0} = \vec{0} = A(\lambda \vec{x}) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda \vec{x}$ Lösung für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

Bsp5: $\begin{matrix} x+y=0 \\ 3x+3y=0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$

Lösungen: $\begin{matrix} x=1 \\ y=-1 \end{matrix} \;\Big|\; \begin{matrix} x=4 \\ y=-4 \end{matrix} \;\Big|\; \begin{matrix} x=-3 \\ y=3 \end{matrix} \;\Big|\; \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x=\lambda \\ y=-\lambda \end{matrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

Satz 2.5

> $A \cdot \vec{x} = \vec{0}, \quad \det A = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n)$
>
> $\Rightarrow$ die Menge der Lösungsvektoren bilden einen linearen Unterraum des $\mathbb{R}^n$

Bew: Fall 1: $\vec{x} \neq \vec{0}$ Lösung $\Rightarrow$ $\lambda\vec{x}$ Lösung (Satz 2.4) $\{\lambda\vec{x}\} =$ Gerade (1. dim. Unterraum)

Fall 2: $\vec{y} \neq 0$ weitere Lösung, $\vec{x}, \vec{y}$ linear unabhängig $\Rightarrow$ $\lambda_2 \cdot \vec{y}$ Lösung

$$\Rightarrow \quad A(\lambda_1\vec{x} + \lambda_2\vec{y}) = A\lambda_1\vec{x} + A\lambda_2\vec{y} = \lambda_1 \underbrace{A\vec{x}}_{0} + \lambda_2 \underbrace{A\vec{y}}_{0} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1\vec{x} + \lambda_2\vec{y} = \text{Lösung} \quad (\text{Ebene})$$

Fall3: $z \neq \vec{0}$ Lösung … usw.

3 Lineare inhomogene Gleichungssysteme

Def. 3.1

> $A =$ Matrix
> $A \cdot \vec{x} = \vec{r} \quad$ mit $\vec{r} \neq \vec{0}$
> $\vec{x} =$ Lösungsvektor
> $\Rightarrow \quad A \cdot \vec{x} = \vec{r}$ lineares inhomogenes GLS

Bsp1:
$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - 2y + 3z &= 2 \\ x - y - z &= 0 \end{aligned}$$

Satz 3.1

> $A \cdot \vec{x} = \vec{r}$ inhomogen
> Das GLS besitzt genau einen Lösungsvektor $\vec{x} \neq \vec{0}$, dann und nur dann, wenn die Determinante von A ungleich 0 ist $(\det A \neq 0)$.

Bew: zeigen: eindeutige Lösung $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$

(1) eindeutige Lösung $\Rightarrow$ $\det A \neq 0$

indirekte Annahme: $\det A = 0 \quad \Rightarrow \quad$ es gibt ein $\vec{z} \quad : \quad A \cdot \vec{z} = \vec{0} \quad \left(\vec{z} \neq \vec{0}\right) \quad$ (Satz 2.3)

sei $\vec{x} =$ eindeutige Lösung $\quad \Rightarrow \quad A \cdot \vec{x} = \vec{r} \quad \Rightarrow \quad A\left(\vec{x} + \vec{r}\right) = A\vec{x} + A\vec{r} = \vec{r} + \vec{0} = \vec{r}$

$\Rightarrow$ es gibt zweite Lösung $\Rightarrow$ Widerspruch $\Rightarrow$ Annahme falsch $\Rightarrow$ Satz richtig

(2) $\det A \neq 0 \quad \Rightarrow$ eindeutige Lösung

$\det A \neq 0 \quad \Rightarrow$ es gibt $A^{-1} \quad \Rightarrow \quad \left[\text{wenn } A\vec{x} = \vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \underbrace{A^{-1} \cdot \vec{r}}_{\text{eindeutig}}\right]$

Bsp2:
$$\begin{aligned} 3x + 3y + z &= 1 \\ 3y - z &= 2 \\ 7z &= 8 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \det = 63 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{eine Lösung}$$

Satz 3.2

> $A \cdot \vec{x} = \vec{r} \quad \left(\vec{r} \neq \vec{0}\right)$
> $\det A = 0 \quad \Leftrightarrow$ es gibt unendlich viele Lösungen oder gar keine

Bew: (1) $\det A = 0 \quad \Rightarrow$ keine oder ∞ viele Lösungen

$\det A = 0 \quad \Rightarrow$ es gibt keine eindeutige Lösung (dann wäre $\det \neq 0$) $\Rightarrow$ keine oder mindestens zwei

sei $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ Lösungen mit $\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2 \quad \Rightarrow \quad A\left(\vec{x}_1 - \vec{x}_2\right) = A\vec{x}_1 - A\vec{x}_2 = \vec{r} - \vec{r} = \vec{0}$

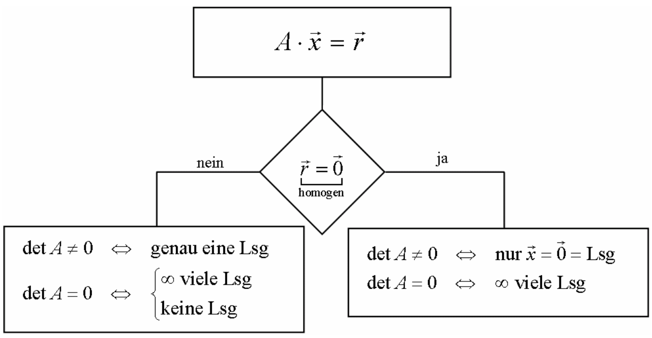
setze $\vec{z} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \quad \Rightarrow \quad A\vec{z} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad A\left(\vec{x}_1 + \lambda\vec{z}\right) = A\vec{x}_1 + A\lambda\vec{z} = \vec{r} + \lambda\vec{0} = \vec{r}$

$\Rightarrow \quad \vec{x}_1 + \lambda\vec{z}$ Lösung für alle $\lambda \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \infty$ viele

(2) keine oder ∞ viele Lösungen $\Rightarrow$ $\det A = 0$

indirekt: $\det A \neq 0 \quad \underset{\text{Satz 3.1}}{\Rightarrow}$ eindeutige Lösung, Widerspruch

Existenz von Lösungen



4 Die Cramer'sche Regel

Herleitung

Gleichungssystem $A\vec{x}=\vec{r}\quad(\det A\neq 0)$

$$\Rightarrow\quad \vec{x}=A^{-1}\cdot\vec{r}\quad\underset{\text{IV, Satz 4.7}}{\Rightarrow}\quad A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \vdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \vdots & A_{n2}\\ \dots & \dots & & \dots\\ A_{1n} & A_{2n} & \vdots & A_{nn}\end{pmatrix}\quad(A_{ij}=\text{Adjunkte})$$

$$\Rightarrow\quad \vec{x}=A^{-1}\cdot\vec{r}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & \vdots & A_{n1}\\ \dots & & \dots\\ A_{1n} & \vdots & A_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}r_1\\ \vdots\\ r_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

$$x_1=\frac{1}{\det A}(A_{11}\cdot r_1+A_{21}\cdot r_2\dots+A_{n1}\cdot r_n)=\frac{1}{\det A}\begin{vmatrix}r_1 & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ r_n & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}=\frac{\det(\vec{r},\vec{a}_2,\vec{a}_3,\dots\vec{a}_n)}{\det(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\dots\vec{a}_n)}\quad(a_j=\text{Spaltenvektor})$$

$$x_2=\frac{1}{\det A}(A_{12}\cdot r_1+A_{22}\cdot r_2\dots+A_{n2}\cdot r_n)=\frac{1}{\det A}\begin{vmatrix}a_{11} & r_1 & \dots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & r_n & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}=\frac{\det(\vec{a}_1,\vec{r},\vec{a}_3,\dots\vec{a}_n)}{\det(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\dots\vec{a}_n)}$$

allgemein: $\quad x_j=\dfrac{\det(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\dots r,\dots\vec{a}_n)}{\det(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\dots\vec{a}_n)}$

Satz 4.1

Cramer'sche Regel

Sei $A\cdot\vec{x}=\vec{r}$ Gleichungssystem mit $\det A\neq 0$ und $A=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots\vec{a}_n)\quad(a_j=\text{Spaltenvektor})$

$$\Rightarrow\quad x_j=\frac{\det(\vec{a}_1,\dots r,\dots\vec{a}_n)}{\det(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots\vec{a}_n)}$$

Anmerkung:
Man erhält x_j indem man in der Koeffizientendeterminate die Spalte Nr j durch die rechte Seite ersetzt und diesen Determinatenwert durch die Koeffizientendeterminante dividiert.

Bsp1:

$$\begin{array}{ccccccc} & & x & - & y & = & 4\\ & & y & - & z & = & 4\\ x & + & y & + & z & = & 4\end{array}\qquad\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 4\\ 4\end{pmatrix}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}4 & -1 & 0\\ 4 & 1 & -1\\ 4 & 1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{4\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}4 & -1\\ 4 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{4\cdot 2+8}{2+1}=\frac{16}{3}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 4 & 0\\ 0 & 4 & -1\\ 1 & 4 & 1\end{vmatrix}}{\det A}=\frac{\begin{vmatrix}4 & -1\\ 4 & 1\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}}{3}=\frac{4}{3}\qquad z=\frac{1}{3}\begin{vmatrix}1 & -1 & 4\\ 0 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 4\end{vmatrix}=\frac{1}{3}\left(\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & 4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 1 & 4\end{vmatrix}\right)=-\frac{8}{3}$$

Bsp2:

$$\begin{array}{l}ax+by=r\\ cx+dy=s\end{array}\qquad\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\\ s\end{pmatrix}$$

$$x=\frac{rd-sb}{ad-bc}\qquad y=\frac{as-rc}{ad-bc}$$

VI EIGENWERTPROBLEME

1 Eigenwerte und Eigenvektoren

Def. 1.1

> Es sei A eine quadratische Matrix
> Wenn $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ mit $\vec{x} \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$, dann heißt λ Eigenwert und $\vec{x}$ Eigenvektor.

Bsp1: $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} 3,618 \\ 5,854 \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{3,618}_{\lambda}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1,618 \end{pmatrix}}_{\vec{x}}$

Satz 1.1

> $\vec{x} =$ Eigenvektor zu $A \quad \Rightarrow$
> $\alpha \cdot \vec{x} =$ Eigenvektor zu $A \quad \Rightarrow$
> (Es gibt unendlich viele Eigenvektoren)

Bew: $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad \Rightarrow \quad \alpha A\vec{x} = \alpha\lambda\vec{x} \quad \Rightarrow \quad A \cdot \boxed{\alpha\vec{x}} = \lambda \cdot \boxed{\alpha\vec{x}}$

Satz 1.2

> $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$

Bew: $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad A\vec{x} - \lambda \underbrace{\vec{x}}_{E\vec{x}} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$

Satz 1.3

> λ Eigenwerte zu $A \quad \Leftrightarrow \quad \det(A - \lambda E) = 0$

Bew: $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \underset{\text{Satz 1.2}}{\Leftrightarrow} (A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \det(A - \lambda E) = 0$ (da homogenes GLS)

Folgerung:
Berechnung von Eigenwerten: Man löse die Gleichung $\det(A - \lambda E) = 0$

Bsp2: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; Eigenwerte = ?

$$\det(A - \lambda E) = \det\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (2-\lambda)(3-\lambda) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 - 5\lambda + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2,5 \pm \sqrt{2,5^2 - 5} = \begin{Bmatrix} 3,618 \\ 1,382 \end{Bmatrix} = \text{Eigenwerte}$$

Bsp3: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda E) = \det\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right] = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$= (4-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 4 \,|\, 2 \,|\, 1 = \text{Eigenwerte}$$

Satz 1.4 $\boxed{\det(a-\lambda E) \text{ ist Polynom in } \lambda \text{ vom Grad} \le n \quad (A = n\times n - \text{Matrix})}$

Bew: $\det(A-\lambda E) = \det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$

Berechnung der Determinate: $+|-|*$ und λ bis höchstens $\lambda^n \quad \Rightarrow \quad$ Polynom Grad $\le n$

Auffinden aller Eigenwerte: Man löse $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$

Def. 1.2 $\boxed{\text{Das Polynom } \det(A-\lambda E0) \text{ heißt charakteristisches Polynom zu } A.}$

Satz 1.5 $\boxed{\text{Eine } n-\text{reihige quadratische Matrix hat höchstens } n-\text{verschiedene Komplexe oder Eigenwerte.}}$

Bew: $\det(A-\lambda E) = \text{Polynom Grad } n \quad \Rightarrow \quad$ Satz

Bsp4: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\left[(2-\lambda)^2+3\right] = 0$$

$$\underset{\lambda_1=3}{\Rightarrow} \quad (2-\lambda)^2+3 = 0 = \lambda^2-4\lambda+7 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} \lambda_2 = 2\pm\sqrt{3}j \\ \lambda_3 = 2-\sqrt{3}j \\ \lambda_1 = 3 \end{array}\right\} \text{ Eigenwerte}$$

Bsp5: $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$\det(M-\lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 = (3-\lambda)(4-\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = 3 \quad \Rightarrow \quad M\vec{x} = 3\vec{x} \\ \lambda_2 = 4 \quad \Rightarrow \quad M\vec{y} = 4\vec{y} \end{array}$$

Berechnung der Eigenvektoren $\vec{x}, \vec{y}$

(1) Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 3$

$$M\vec{x} = 3\vec{x} \quad \Rightarrow \quad (M-3E)\vec{x} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

(2) Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 4$

$$M\vec{y} = 4\vec{y} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 3y_1+y_2 \\ 4y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4y_1 \\ 4y_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} 3y_1+y_2 = 4y_1 \\ 4y_2 = 4y_2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad y_2 = \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 4y_1 - 3y_1 = y_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} y_1 = \alpha \\ y_2 = \alpha \end{array} \quad \Rightarrow \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Satz 1.6

A Matrix
A singulär $\Leftrightarrow$ $\det A = 0$ $\Leftrightarrow$ A hat Eigenwert 0

Bew: $\det\left(A-\lambda E\right)=\det\left(A-0E\right)=\det A=0$

Satz 1.7

$\lambda \neq 0$, λ Eigenwert zu A $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{\lambda}$ Eigenwert zu A^{-1} $\left(\det A \neq 0\right)$

Bew: $A\vec{x}=\lambda\vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x}=A^{-1}\cdot\lambda\vec{x}=\lambda A^{-1}\vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\lambda}\vec{x}=A^{-1}\vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1}\vec{x}=\frac{1}{\lambda}\vec{x}$

Satz 1.8

E hat nur Eigenwert $\lambda=1$

Bew: $E\vec{x}=\vec{x} \quad \Rightarrow \quad E\vec{x}=1\cdot\vec{x}$

Def. 1.3

λ heißt $k-$facher Eigenwert von A, falls λ $k-$fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist.

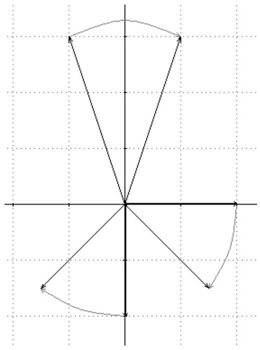
2 Abbildungen im Vektorraum

Bsp1: $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\vec{y} = M\vec{x}$

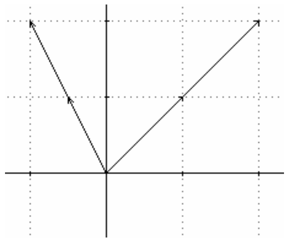
$\vec{y} = M\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{y}$

M beschreibt eine Drehung der Ebene



Bsp2: $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\vec{y} = M\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{y} = 2\vec{x}$



Def. 2.1

Die Beziehung $\vec{y} = M\vec{x}$ stellt eine Abbildung dar, die jedem Punkt (Vektor) $\vec{x}$ des n – dimensionalen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ einen Punkt (Vektor) $\vec{y}$ zuordnet. n heißt Abbildung.