DIE KOMPLEXEN ZAHLEN

Grundbegriffe

$$\underline{z} = a + \mathrm{j}b = r \cdot e^{\mathrm{j}\varphi}$$
$$|\underline{z}| = z = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$a = r \cdot \cos\varphi$$
$$b = r \cdot \sin\varphi$$
$$\underline{z} = r\left(\cos\varphi + \mathrm{j}\,\sin\varphi\right)$$
$$\underline{z}^* = a - \mathrm{j}b = r \cdot e^{-\mathrm{j}\varphi}$$

$$\varphi = \arg \underline{z} = \begin{cases} \arctan\dfrac{b}{a} & ,a > 0 \\ \arctan\dfrac{b}{a} \pm \pi & ,a < 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & ,a = 0 \text{ und } b > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & ,a = 0 \text{ und } b < 0 \end{cases}$$

$$\underline{z}_1\,\underline{z}_2 = z_1\,z_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{z_1}{z_2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_1-\varphi_2)} \xRightarrow[\text{konjugiert erweitern}]{\text{Komponentenschreibweise}} \frac{a_1\,a_2 + b_1\,b_2 + \mathrm{j}\left(a_2\,b_1 - a_1\,b_2\right)}{a_2^{\,2} + b_2^{\,2}}$$

$$\frac{1}{\underline{z}} = \frac{1}{z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}} = \frac{1}{z}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi} \xRightarrow[\text{konjugiert erweitern}]{\text{Komponentenschreibweise}} \ldots$$

GRUNDBEGRIFFE DER WECHSELSTROMTECHNIK

allgemeines über Wechselgrößen

$$u = u(t) = \hat{u}\cos\left(\omega t + \varphi_u\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{Im}\left(\underline{U}\right)$$
$$i = i(t) = \hat{i}\,\cos\left(\omega t + \varphi_i\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{Im}\left(\underline{I}\right)$$
$$\underline{U} = U\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u}$$
$$\underline{I} = I\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i}$$
$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

Periodendauer

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$
$$[f] = \frac{1}{\mathrm{s}} = \mathrm{Hz} \qquad [\omega] = \mathrm{s}^{-1}$$

ALLGEMEINES

Singnalwerte

Mittelwert (arith. Mittel)
$$\overline{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,\mathrm{d}t$$

Gleichrichtwert (Betragsmittel)
$$\overline{|u|} = \frac{1}{T}\int_0^T |u(t)|\,\mathrm{d}t \qquad \overline{|u|} \neq |\overline{u}|$$
$$\overline{|u|}_{\sin} = \frac{2\,\hat{u}}{\pi}$$

Effektivwert RMS
$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,\mathrm{d}t}$$
$$U_{\sin} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$$

Formfaktor
$$F = \frac{U}{\overline{|u|}}$$
$$F_{\sin} = \frac{\hat{u}/\sqrt{2}}{\hat{u}\cdot 2/\pi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

CREST-Faktor
$$FC = \frac{|u|_{\max}}{U} = \frac{\hat{u}}{U}$$

Meßgerät-anzeige

Voltmeter für Gleichspannung
$$U_{\mathrm{ANZ}} = \overline{u}$$

Voltmeter für Wechselspannung
$$U_{\mathrm{ANZ}} = \overline{|u|}\cdot F_{\sin}$$

Rel. Fehler
$$\delta = \frac{U_{\mathrm{ANZ}} - U}{U}$$

Effektivwert bekannter Form mit Voltmeter für ⊔
$$U = U_{\mathrm{ANZ}}\cdot\frac{F_x}{F_{\sin}}$$

$$\int \sin^2 \alpha x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4\alpha}\sin^2 2\alpha x$$
$$\int \cos^2 \alpha x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4\alpha}\sin^2 2\alpha x$$

log. Maßstab

$$\log(a\cdot b) = \log a + \log b$$
$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$
$$l_x = l_{\mathrm{D}}\cdot\log\frac{x}{x_{\mathrm{A}}}$$
$$x = x_{\mathrm{A}}\cdot 10^{l_x/l_{\mathrm{D}}}$$

Übertragungsmaß dB

Leistungsverhältnisse
$$V_P = 10\cdot\log\frac{P}{P_0}\ \mathrm{dB}$$
$$\frac{P}{P_0} = 10^{V_P/10\ \mathrm{dB}}$$

Spannungsverhältnisse (Strom-)
$$V_U = 20\cdot\log\frac{U}{U_0}\ \mathrm{dB}$$
$$\frac{U}{U_0} = 10^{V_U/20\ \mathrm{dB}}$$

einige Werte

$$P = P_0 \Rightarrow V = 0\,\mathrm{dB}$$
$$P > P_0 \Rightarrow V > 0$$
$$P < P_0 \Rightarrow V < 0$$
$$\frac{P}{P_0} = 2 \Rightarrow V \approx 3\,\mathrm{dB}$$
$$\frac{P}{P_0} = 10 \Rightarrow V = 10\,\mathrm{dB}$$
$$\frac{P}{P_0} = 100 \Rightarrow V = 20\,\mathrm{dB}$$

$$\frac{U}{U_0} = \sqrt{2} \Rightarrow V \approx 3\,\mathrm{dB}$$
$$\frac{U}{U_0} = 2 \Rightarrow V \approx 6\,\mathrm{dB}$$
$$\frac{U}{U_0} = 10 \Rightarrow V = 20\,\mathrm{dB}$$
$$\frac{U}{U_0} = 100 \Rightarrow V = 40\,\mathrm{dB}$$

Dämpfung

Kehrwert der Verstärkung
$$a = 10\log\frac{p_o}{p}\ \mathrm{dB} = -V$$

Einfügungsdämpfung
$$a_{\mathrm{E}} = \left[20\log\frac{U_0}{U_2} + 20\log\frac{|\underline{Z}_2|}{|\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2|}\right]\mathrm{dB}$$

Betriebsdämpfung
$$a_{\mathrm{B}} = \left[20\log\frac{U_0/2}{U_2} + 10\log\frac{|\underline{Z}_2|}{|\underline{Z}_1|}\right]\mathrm{dB}$$

Wellendämpfung
$$a_{\mathrm{W}} = \left[20\log\frac{U_1}{U_2} + 10\log\frac{|\underline{Z}_2|}{|\underline{Z}_1|}\right]\mathrm{dB}$$

Pegel

Leistungspegel
$$p_{\mathrm{P}} = 10\cdot\log\frac{P}{1\,\mathrm{W}}\ \mathrm{dBW}$$
$$P = 10^{p_{\mathrm{P}}/10\ \mathrm{dBm}}\ \mathrm{mW}$$

Spannungspegel
$$p_{\mathrm{U}} = 20\log\frac{U}{1\,\mu\mathrm{V}}\ \mathrm{dB}\mu\mathrm{V}$$
$$U = 10^{p_{\mathrm{U}}/20\ \mathrm{dB}\mu\mathrm{V}}\ \mu\mathrm{V}$$

Ausnahmen

Leistungspegel dBm
$$p_{\mathrm{P}} = 10\cdot\log\frac{P}{\mathrm{mW}}\ \mathrm{dBm}$$

Spannungspegel dB
$$p_{\mathrm{U}} = 20\log\frac{U}{775\,\mathrm{mV}}\ \mathrm{dB}$$

Geräuschpegel dB(A)
z.B Lärmangaben

 Seite 2

BODE – DIAGRAMM

Grundtypen

1. Typ

$\underline{H}_1(\mathrm{j}\omega) = \mathrm{j}\omega\tau$

Steigung: $20\,\mathrm{dB/Dekade}$

Schnittpunkt: $1/\tau$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$

2. Typ

$\underline{H}_2(\mathrm{j}\omega) = 1 + \mathrm{j}\omega\tau$

$\omega \to 0$:
- Steigung: $0\,\mathrm{dB/Dekade}$
- $\varphi = \arg \underline{H}_2 \to 0$

$\omega \to \infty$: (wie Typ 1)
- Steigung: $20\,\mathrm{dB/Dekade}$
- $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$\omega = 1/\tau$:
- Steigung: $20\,\mathrm{dB/Dekade}$
- $\varphi = \arg \underline{H}_2 = \frac{\pi}{4}$

3. Typ

$\underline{H}_3(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{\mathrm{j}\omega\tau}$

Steigung: $-20\,\mathrm{dB/Dekade}$

Schnittpunkt: $1/\tau$

$\varphi = -\frac{\pi}{2}$

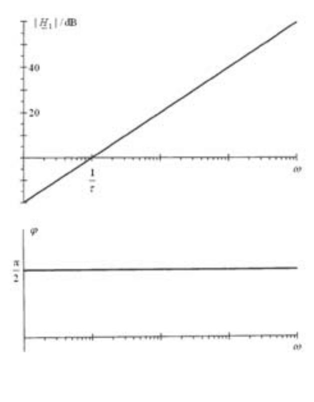
4. Typ

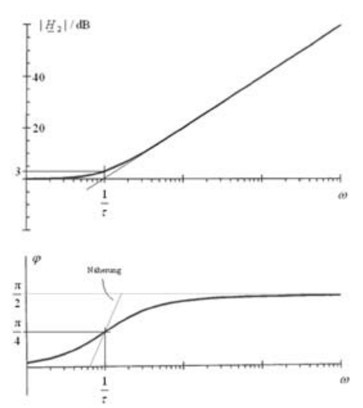
$\underline{H}_4(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega\tau}$

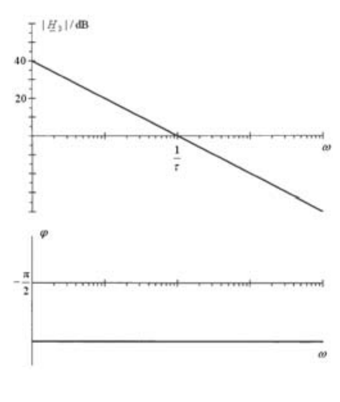
$\omega \to 0$:
- Steigung: $0\,\mathrm{dB/Dekade}$
- $\varphi = \arg \underline{H}_2 \to 0$

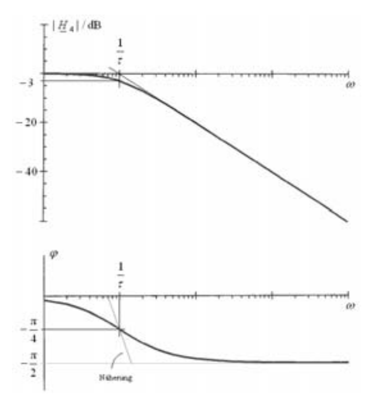
$\omega \to \infty$:
- Steigung: $-20\,\mathrm{dB/Dekade}$
- $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

$\omega = 1/\tau$:
- Steigung: $-20\,\mathrm{dB/Dekade}$
- $\varphi = \arg \underline{H}_2 = -\frac{\pi}{4}$









Faktoren und Vorzeichen

$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = k$	$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = -1$
$\Rightarrow\ \lvert\underline{H}\rvert = 20 \cdot \log k$	$\Rightarrow\ \lvert\underline{H}\rvert = 0$
$\Rightarrow\ \arg \underline{H} = 0$	$\Rightarrow\ \arg \underline{H} = \pm\pi$

MESSFEHLER

systematische Messfehler

absoluter Messfehler

$\Delta x = x_\mathrm{a} - x_\mathrm{w}$

- x_a : abgelesener Wert
- x_w : wahrer Wert

relativer Messfehler

$$\delta_x = \frac{\Delta x}{x_\mathrm{w}} = \frac{x_\mathrm{a} - x_\mathrm{w}}{x_\mathrm{w}} = \frac{x_\mathrm{a}}{x_\mathrm{w}} - 1 \quad (\text{evtl. in \% oder dB})$$

$\Rightarrow$

$$1 + \delta_x = \frac{x_\mathrm{a}}{x_\mathrm{w}} \qquad (\text{calibration factor})$$

Korrektur

$$\boxed{x_\mathrm{w} = x_\mathrm{a} - \Delta x \qquad x_\mathrm{w} = \frac{x_\mathrm{a}}{1 + \delta_x}}$$

Fehlerfort-pflanzung

Sei $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Bei der Messung der x_ν treten Absolutfehler Δx_ν auf

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\Delta y \approx \frac{\delta y}{\delta x_1}\Delta x_1 + \frac{\delta y}{\delta x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\delta y}{\delta x_n}\Delta x_n \qquad (\text{partielle Ableitung})$$

KLIRRFAKTOR

Definition

Eingangssignal eines Systems mit nicht linearen Elementen gegeben durch

$$x(t) = \sqrt{2} \cdot X \cdot \cos(\omega_0 t)$$

dann hat das Ausgangssignal die Form

$$y(t) = \sqrt{2}\left[Y_1 \cdot \cos(\omega_0 t) + Y_2 \cdot \cos(2\omega_0 t) + Y_3 \cdot \cos(3\omega_0 t) + \ldots\right]$$

der Klirrfaktor ist dann

$$k = \sqrt{\frac{Y_2^2 + Y_3^2 + \ldots}{Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + \ldots}}$$

SPEKTRUM- & NETZWERKANALYSE

der Spektralbegriff bei periodischem Signal

Zeitfunktion zerlegen in FOURIER-Reihe

$$f(t+T) = f(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \cdot \cos(\nu \cdot \omega_0 t + \varphi_\nu)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \qquad T: \text{Periodendauer}$$

verwende hierfür Tabellen

Für $\nu > 0$:

$$a_\nu = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\cos(\nu\cdot\omega_0 t)\,\mathrm{d}t$$

$$b_\nu = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\sin(\nu\cdot\omega_0 t)\,\mathrm{d}t$$

$$c_\nu = \sqrt{a_\nu + b_\nu}$$

$$\varphi_\nu = \begin{cases} -\arctan\frac{b_\nu}{a_\nu} & , a_\nu > 0 \\ -\arctan\frac{b_\nu}{a_\nu} \pm \pi & , a_\nu < 0 \\ -\frac{\pi}{2} & , a_\nu = 0 \text{ und } b_\nu > 0 \\ \frac{\pi}{2} & , a_\nu = 0 \text{ und } b_\nu < 0 \end{cases}$$

Für $\nu = 0$:

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = \overline{f}$$ Offset

Signal durchläuft lineares System mit der Übertragungsfunktion $\underline{H}(\omega)$, dann ist y wieder periodisch

$$\left.\begin{aligned} d_\nu &= c_\nu \left|\underline{H}(\nu\omega_0)\right| \\ \psi_\nu &= \varphi_\nu + \arg \underline{H}(\nu\omega_0) \end{aligned}\right\} \text{lineare Verzerrung}$$

nicht periodisches Signal

Grenzübergang:

$$f_0 \to 0$$
$$T \to \infty$$
$$\sum \to \int$$

FOURIER-Transformation:

$$\underline{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$

Vorraussetzung für Existenz von $\underline{F}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$$

Spektrum Analyser

ATT (attenuator)
Eingangsabschwächung (z.B 0dB, 5dB, …, 60dB)
So einstellen, dass der Mischer gerade noch nicht übersteuert
ATT zu klein: evtl. Zerstörung des Mischers
ATT zu groß: Eigenrauschen des Geräts stört überflüssig

REF (reference)
Lage der Ordinate
Bezeichnet größten ablesbaren Pegel
(Oberkante Diagramm)

SCALE
Auflösung des Ordinatenmaßstabs
(z.B. 1dB/div, 5dB/div, 10dB/div, …)

FSTART / FSTOP oder **FCENT / SPAN**
Frequenzskala nach Anfang und Ende
oder Zentrum und Hub

SWT (sweep time)
Zeit für einen Wobbelvorgang (sweep)

VBW (video bandwidth)
Grenzfrequenz des Video-Filters.
Glättung der Messkurve, dadurch evtl. im Rauschen verstecktes Signal sichtbar.
Regel: $\text{VBW} \geq \text{RBW}$
VBW nur einsetzen, wenn alle anderen Möglichkeiten zur Reduzierung des Rauschens (ATT, RBW) ausgeschöpft sind

RBW (resolution bandwidth)
Auflösungsbandbreite = 3dB-Bandbreite des ZF-Filters
(z.B. 3Hz, 10Hz, 30Hz, …, 100MHz)
Faustformel: $\text{RBW} \approx 1/50$ kleinster Linienabstand
- RBW groß:
  kurze Messzeit, Rauschen von Mischer und ZF-Verstärker stark (bei Rauschen: Effektivwert prop $\sqrt{\text{BB}}$), nahe beiein. liegende Linien nicht gegenein. auflösbar
- RBW klein:
  lange Messzeit, hohe Dynamik, feine Auflösung

SPAN, SWT und RBW müssen aufeinander abgestimmt sein.
SWT zu kurz: ZF-Filter schwingt nicht ein, Messfehler
SWT zu lang: überflüssig lange Messzeit

Faustformel

$$\text{SWT} = K \cdot \frac{\text{SPAN}}{\text{RBW}^2}$$

$$K = 2,\ldots,5 \quad (\text{gerätespezifisch, ausprobieren!})$$

Anwendung zur Bestimmung von Modulationsfrequenz und Modulationsgrad

$$f_s = |\Delta f|$$

$$m = 2\cdot 10^{\Delta p/20\,\text{dB}}$$

Einstellungen für sehr kleine Signale
- ATT möglichst klein
- RBW möglichst klein (SWT entsprechend vergrößern)
- notfalls VBW < RBW

Reflexionsmessung

Außer der vorlaufenden Welle existiert auch eine Rücklaufende.
REFLEXION! Beide überlagern sich (Interferenz)

$$\underline{U} = \underline{U}_v + \underline{U}_r$$

$$\underline{I} = \underline{I}_v - \underline{I}_r$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{\underline{U}_v}{\underline{I}_v} = \frac{\underline{U}_r}{\underline{I}_r} = \underline{Z}_0$$

Definition des Reflexionsfaktors

$$\underline{r} = \frac{\underline{Z} - \underline{Z}_0}{\underline{Z} + \underline{Z}_0}$$

$$\underline{Z} = \underline{Z}_0 \frac{1+\underline{r}}{1-\underline{r}}$$