Allgemeine Infos

2er Potenzen (FFT)

2er Potenz	Dezimal
2^0	1
2^1	2
2^2	4
2^3	8
2^4	16
2^5	32
2^6	64
2^7	128
2^8	256
2^9	512
2^{10}	1.024
2^{11}	2.048
2^{12}	4.096
2^{13}	8.192
2^{14}	16.384
2^{15}	32.768
2^{16}	65.536
2^{17}	131.072
2^{18}	262.144
2^{19}	524.288
2^{20}	1.048.576
2^{21}	2.097.152
2^{22}	4.194.304
2^{23}	8.388.608
2^{24}	16.777.216
2^{25}	33.554.432
2^{26}	67.108.864
2^{27}	134.217.728
2^{28}	268.435.456
2^{29}	536.870.912
2^{30}	1.073.741.824
2^{31}	2.147.483.648
2^{32}	4.294.967.296

e-Funktionen

$$e^{jx} + e^{-jx} = 2\cos(x)$$

$$e^{jx} - e^{-jx} = 2j\sin(x)$$

$$e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x)$$

$$e^{-jx} + e^{jx} = 2\cos(-x) = 2\cos(x)$$

$$e^{-jx} - e^{jx} = 2j\sin(-x) = -2j\sin(x)$$

$$e^{-jx} = \cos(x) - j\sin(x)$$

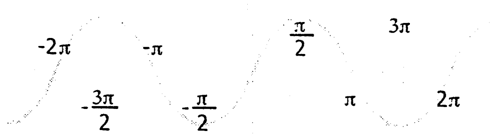
$$\left|e^{-jx}\right| = 1$$

$$e^{-j0} = 1 \quad ; \quad e^{-j\pi} = -1 \quad ; \quad e^{-j2\pi} = 1$$

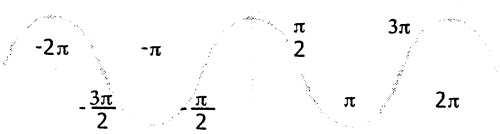
$$e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j \quad ; \quad e^{-j\frac{3\pi}{2}} = j$$

Sinus und Cosinus

Sinus



Cosinus



DFT / FFT

Shannon

$$f_a = 2 \cdot f_{max}$$

f_a = Abtastfrequenz
f_{max} = höchste Frequenz

Fensterbreite

$$T_F = N \cdot T_A = N \cdot \frac{1}{f_a}$$

T_F = Fensterbreite
N = Blocklänge (Anzahl der Spektrallinien)
T_A = Abtastdauer (Kehrwert der Abtastfrequenz)
f_a = Abtastfrequenz

für möglichst wenig Fehler gilt zusätzlich

$$T_F = k \cdot T_S = k \cdot \frac{1}{f_S}$$

→ zeitbegrenztes Signal kann hiermit links und rechts fortgesetzt werden, da immer gesamte Periode des bandbegrenzten Signals im Fenster liegt

T_F = Fensterbreite
k = ganzzahliger Faktor
T_S = Periode des bandbegrenzten Signals
f_S = Frequenz des bandbegrenzten Signals

Besonderheiten der FFT

$$N = 2^r \;\Rightarrow\; r = \log_2(N)$$

N = Blocklänge (Anzahl der Spektrallinien)
r = ganzzahliger Exponent

$f_a > f_s$

~~f(n) =~~

Auflösung im Frequenzbereich

$$Auflösung = \frac{f_a}{N}$$

Auflösung = Abstand zwischen 2 Spektrallinien
f_a = Abtastfrequenz
N = Blocklänge (Anzahl der Spektrallinien)

Berechnungsaufwand

DFT:

$$M = N^2$$

FFT:

$$M = N \cdot r = N \cdot \log_2(N)$$

M = Anzahl Multiplikationen
N = Blocklänge (Anzahl der Spektrallinien)

Goertzel-Konstante

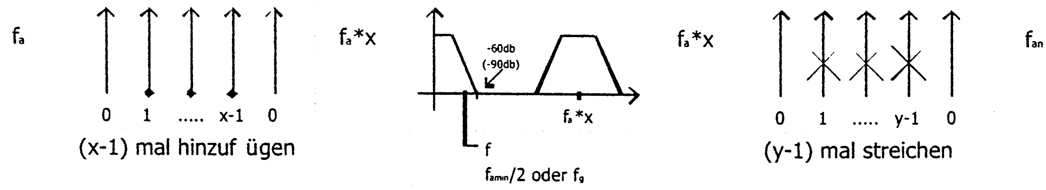
$$W_N^{-k}$$

k = ganzzahliger Faktor
N = Blocklänge (Anzahl der Spektrallinien)

Digitale Filter

Abtastratenwandlung

Verfielfachung um x ; Verringerung um y



Fehlender Bereich geht bei fehlender Bandbegrenzung von $f_a/2$ bis $f_{an}/2$.
Falls Bandbegrenzung vorgenommen wurde geht der Bereich des Spektrums von 0 bis f_g, dann folgt eine Lücke bis $f_{an}-f_g$. An der Position f_{an} befindet sich die Symmetrieachse.

$$\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right);\ \sin x = \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

	sin x	**cos x**	**tan x**	**cot x**
sin x	-	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\pm\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$
cos x	$\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$	-	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm\frac{\cot x}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$
tan x	$\pm\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	-	$\frac{1}{\cot x}$
cot x	$\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\pm\frac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\frac{1}{\tan x}$	-

$$\sin(x_1 \pm x_2) = \sin x_1 \cdot \cos x_2 \pm \cos x_1 \cdot \sin x_2$$
$$\cos(x_1 \pm x_2) = \cos x_1 \cdot \cos x_2 \pm \sin x_1 \cdot \sin x_2$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}[1-\cos(2x)]$$
$$\sin^3 x = \frac{1}{4}[3\cdot\sin x - \sin(3x)]$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}[1+\cos(2x)]$$
$$\cos^3 x = \frac{1}{4}[3\cdot\cos x + \cos(3x)]$$

$$\sin x_1 \cdot \sin x_2 = \frac{1}{2}[\cos(x_1-x_2) - \cos(x_1+x_2)]$$
$$\cos x_1 \cdot \cos x_2 = \frac{1}{2}[\cos(x_1-x_2) + \cos(x_1+x_2)]$$
$$\sin x_1 \cdot \cos x_2 = \frac{1}{2}[\sin(x_1-x_2) + \sin(x_1+x_2)]$$

Digitale Filter

FIR Filter

Differenzengleichung:

$$y(n)=\sum_{r=0}^{M} b_r \cdot f(n-r)$$

$$y(n)=b_0\cdot f(n)+b_1\cdot f(n-1)+\ldots+b_M\cdot f(n-M)$$

Systemfunktion:

$$G(z)=\sum_{r=0}^{M} b_r\cdot z^{-r}$$

$$G(z)=b_0+b_1\cdot z^{-1}+\ldots+b_M\cdot z^{-M}$$

Frequenzgang:

$$G_F\left(j\frac{\omega}{\Omega}\right)=\sum_{r=0}^{M} b_r\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot\frac{\omega}{\Omega}\cdot r}$$

$$G_F\left(j\frac{\omega}{\Omega}\right)=b_0+b_1\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot\frac{\omega}{\Omega}\cdot 1}+\ldots+b_M\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot\frac{\omega}{\Omega}\cdot M}$$

Amplitudenfrequenzgang:

$$|G_F|=\sqrt{\mathrm{Re}^2+\mathrm{Im}^2}$$

Phasenfrequenzgang:

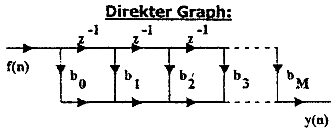
$$\Phi_F=\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right)$$

Spezialfall bei symmetrischen Koeffizienten:

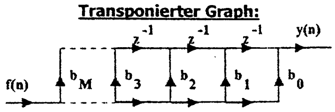
$$G(z)=z^{-\frac{M}{2}}\sum_{r=0}^{\frac{M-1}{2}} b_r\cdot\left(z^{-\left(r-\frac{M}{2}\right)}+z^{\left(r-\frac{M}{2}\right)}\right)$$

$$G_F\left(j\frac{\omega}{\Omega}\right)=e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot\frac{\omega}{\Omega}\cdot\frac{M}{2}}\sum_{r=0}^{\frac{M-1}{2}} b_r\cdot\cos\left[2\cdot\pi\cdot\frac{\omega}{\Omega}\cdot\left(r-\frac{M}{2}\right)\right]$$

Direkter Graph:



Transponierter Graph:



Null-/Polstellen

$$x^2+p\cdot x+q\ \Rightarrow\ x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c\ \Rightarrow\ x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$$

Stabilität von Filtern

stabil, wenn $|Polstelle|<1$

Digitale Filter

IIR Filter

Differenzengleichung:

$$y(n)=\sum_{k=0}^{N} a_k\cdot y(n-k)+\sum_{r=0}^{M} b_r\cdot f(n-r)$$

Systemfunktion:

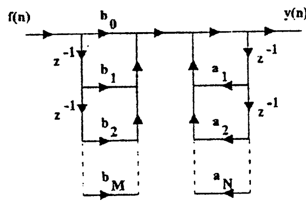
$$G(z)=\frac{\sum_{r=0}^{M} b_r\cdot z^{-r}}{1-\sum_{k=0}^{N} a_k\cdot z^{-k}}=\frac{f(n)}{y(n)}$$

Frequenzgang:

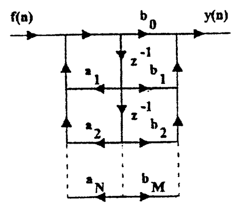
Amplitudenfrequenzgang:

Phasenfrequenzgang:

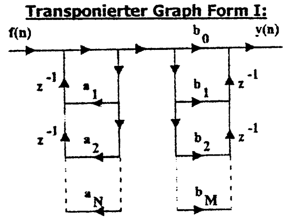
Direkter Graph Form I:



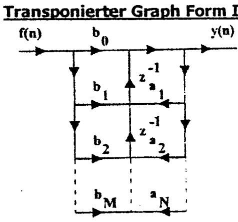
Direkter Graph Form II:



Transponierter Graph Form I:



Transponierter Graph Form II:



Bei G(z):
Zähler: Nullstellen = 0
Nenner: Polstellen = 0

Graphen zeichnen:
Zähler: muss immer „+" sein
Nenner: muss immer „-" sein
Anderenfalls beim Zeichnen Vorzeichen wechseln!