DIE REELLEN ZAHLEN

Zahlentypen

natürliche Zahlen	ganze Zahlen	rationale Zahlen	reelle Zahlen		komplexe Zahlen
$\mathbb{N}=\{0,1,2,\ldots\}$	$\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\ldots\}$	$\mathbb{Q}=\left\{\frac{p}{q}\mid p,q\in\mathbb{Z} \text{ und } q\neq 0\right\}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{N}\in\mathbb{Z}\in\mathbb{Q}\in\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$

Kombinatorik

Binominalkoeffizienten

$$\binom{n}{k}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$$

$$\binom{n}{n-k}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(n-k)+1)}{(n-k)!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$\binom{n}{0}=1$ $\binom{0}{0}=1$ $\binom{n}{n}=1$ $\binom{n}{k}=0$ (wenn $n<k$)

Binominalsatz

$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}\cdot a^{n-1}\cdot b+\binom{n}{2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2+\binom{n}{3}\cdot a^{n-3}\cdot b^3+\ldots+b^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^{n-k}\cdot b^k$$

$$(a-b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot(-1)^k\cdot a^{n-k}\cdot b^k$$

Kombinationen: Eine Menge mit $n-$Elementen besitzt $\binom{n}{k}$ verschiedene Kombinationen mit $k-$ter Ordnung.

FOLGEN UND REIHEN

endliche Folgen

arithmetische Folge

$$a_j=a_1+(j-1)\cdot d \qquad \sum_{j=1}^{n}a_j=\frac{n}{2}(a_1+a_n) \qquad \sum_{j=0}^{n}a^j=\frac{1-a^{n+1}}{1-a} \quad (a\neq1)$$

geometrische Folgen

$$a_j=a_1\cdot q^{j-1} \qquad \sum_{j=0}^{n}a_j=a_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$$

unendliche Folgen

Eulersche Zahl

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n=e^\alpha$$

Reihe (unendliche Folge)

$$\sum_{j=0}^{\infty}q^j=\frac{1}{1-q} \quad (|q|<1)$$

Exponentialreihe

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots$$

LINEARE ALGEBRA

allgemeines

$\vec a\cdot\vec b=|\vec a|\cdot|\vec b|\cdot\cos\alpha$

$\vec a$ senkrecht zu $\vec b \Leftrightarrow \vec a\cdot\vec b=0$

$\vec a_0=\frac{1}{|\vec a|}\cdot\vec a \Rightarrow |\vec a_0|=1$

$V=\det(\vec a_1,\ldots\vec a_n)$

$A=\det(\vec a_1,\ldots\vec a_n)$

$|\vec a+\vec b|\leq|\vec a|+|\vec b|$

$|\vec a\times\vec b|=|\vec a|\cdot|\vec b|\cdot\cos\alpha$

linear unabhängig $\Leftrightarrow \left[\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\vec a_j=\vec 0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\ldots\lambda_k=0\right]$

linear abhängig $\Leftrightarrow \left[\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\vec a_j=\vec 0 \Rightarrow \text{mindestens ein } \lambda_j\neq0\right]$

Skalarprodukt

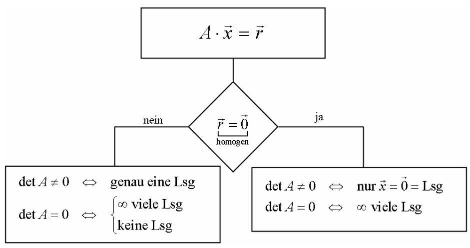
$$\vec a\cdot\vec b=\sum_{j=1}^{n}a_j\cdot b_j$$

Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

$$\vec a\times\vec b=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}\vec e_1&\vec e_2&\vec e_3\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}$$

Spatprodukt

$$\vec a\cdot(\vec b\times\vec c)=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$$



Inverse:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11}&\cdots&A_{n1}\\\vdots&&\vdots\\A_{1n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}$$

$A\cdot\vec x=\vec r \Leftrightarrow \vec x=A^{-1}\cdot\vec r$

$\left[\begin{array}{l}\vec r=0\text{(homogen)}\\\vec r\neq0\text{(inhomog.)}\end{array}\right]$

$\det(A\cdot B)=\det A\cdot\det B$

Cramer:

$$x_j=\frac{\det(\vec a_1,\ldots\vec r_j,\ldots\vec a_n)}{\det A}$$

λ Eigenwert zu A

$\det(A-\lambda E)=0$

BACCAB

$$\vec a\times(\vec b\times\vec c)=\vec b\cdot(\vec a\cdot\vec c)-\vec c\cdot(\vec a\cdot\vec b)$$

Seite 2

FUNKTIONEN

Polynome

Zweipunkteformel (Gerade)

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) \Rightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Nullstellen (Parabel)

$$x^2 + px + q = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Nullstellen (Parabel)

$$ax^2 + bx + c \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Fundamentalsatz der Algebra

$$P_n(x) = a(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$$

Scheitelpunkt (Parabel)

$$\left(-\frac{b}{2a} \mid c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

Kegelschnitte

Kreis

(x_1, y_1) & (x_2, y_2)

$$\Rightarrow \quad d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ellipse um $(x_0 \mid y_0)$

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \ \left((a \mid b) = \text{Achsen}\right) \Rightarrow y = \pm\sqrt{b^2\left(1 - \frac{(x - x_0)^2}{a^2}\right)} + y_0$$

Hyperbel um $(x_0 \mid y_0)$

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{b^2\left(\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - 1\right)} + y_0$$

Asymptoten der Hyperbel um $(0 \mid 0)$

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

Nullstelle der Hyperbel

$$x = \pm\sqrt{a}$$

$$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1 x + b_2 y + c = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = D = \begin{cases} > 0 & \Leftrightarrow \ \text{Ellipse (Kreis)} \\ < 0 & \Leftrightarrow \ \text{Hyperbel} \\ = 0 & \Leftrightarrow \ \text{Parabel} \end{cases}$$

Exp, Log

$y = \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$	$y = a^x = e^{x \cdot \ln a} = \left(e^{\ln a}\right)^x$	$y = a^x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\ln y}{\ln a}$	$\ln x = \ln\lvert x\rvert + j \cdot \operatorname{arc} x$

Trigonometrie

$\sin\alpha = \frac{\text{GK}}{\text{Hyp}}$	$\cos\alpha = \frac{\text{AK}}{\text{Hyp}}$	$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\text{GK}}{\text{AK}}$	$\cot\alpha = \frac{\text{AK}}{\text{GK}}$	Kosinussatz $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$	Sinussatz $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

$$\cos x = \cos(-x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\sin x = -\sin(-x) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$$

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \cdot \sin^2 x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 - \cos x = 2 \cdot \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\cos x = 0{,}5 \cdot \left(e^{j \cdot x} + e^{-j \cdot x}\right)$$

$$\sin x = -0{,}5 \cdot \left(e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}\right)$$

komplexe Zahlen

$$\underline{z} = a + jb = r \cdot e^{j\varphi} \qquad \left(r = \lvert\underline{z}\rvert\right)$$

$$\lvert\underline{z}\rvert = z = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = r \cdot \cos\varphi$$

$$b = r \cdot \sin\varphi$$

$$\underline{z} = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

$$\underline{z}^* = a - jb = r \cdot e^{-j\varphi}$$

$$\varphi = \arg \underline{z} = \begin{cases} \arctan\frac{b}{a} & , a > 0 \\ \arctan\frac{b}{a} \pm \pi & , a < 0 \\ \frac{\pi}{2} & , a = 0 \text{ und } b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & , a = 0 \text{ und } b < 0 \end{cases}$$

$$\underline{z}_1\,\underline{z}_2 = z_1\, z_2\, e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{z_1}{z_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\frac{1}{\underline{z}} = \frac{1}{z\, e^{j\varphi}} = \frac{1}{z} e^{-j\varphi}$$

$$\underline{z}^n = \lvert\underline{z}\rvert^n e^{jn\varphi}$$

$$\sqrt[n]{\underline{z}} = \sqrt[n]{\lvert\underline{z}\rvert} \cdot e^{j\frac{\varphi + 2k\pi}{n}} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

es gibt n-verschiedene Wurzeln

Hyperbolik

$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$	$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$	$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cdot \cosh y - \cosh x \cdot \sinh y$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cdot \cosh y + \sinh x \cdot \sinh y$$

Darstellung

Polarkoordinaten

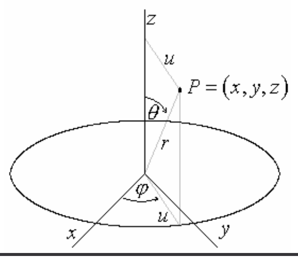
$x = r \cdot \cos\varphi$	$y = r \cdot \sin\varphi$	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$	$\varphi = \arctan\frac{y}{x}$

Parameterdarstellung $(a \le t \le b)$ $\quad t = $ Parameter

$x = \varphi(t)$	$y = \psi(t)$

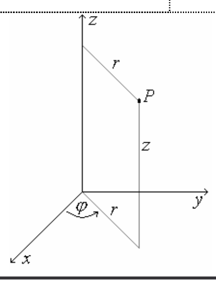
Kugelkoordinaten

$x = r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi$	$y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi$	$z = r \cdot \cos\theta$



Zylinderkoordinaten

$x = r \cdot \cos\varphi$	$y = r \cdot \sin\varphi$	$z = z$



DIFFERENTIALRECHNUNG

Regeln

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$	$(u\cdot v)'=u'v+uv'$	$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$	$(uvw)'=(u'v+uv')w+uvw'=u'vw+uv'w+uvw'$

Ableitungen

y	y'	y	y'	y	y'	y	y'
a	0	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	e^x	e^x	$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$-\sin x$	$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$ $1+\tan^2 x$	$\cot x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$ $-1-\cot^2 x$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arccos x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\cosh x$	$\sinh x$	$\tanh x$	$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$ $1-\tanh^2 x$	$\coth x$	$-\dfrac{1}{\sinh^2 x}$ $1-\coth^2 x$
$\operatorname{arsinh} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arcosh} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{artanh} x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{arcoth} x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$

Diverses

$y=a^x=e^{x\cdot\ln a}=\left(e^{\ln a}\right)^x \quad\Rightarrow\quad y'=e^{x\cdot\ln a}\cdot\ln a=a^x\cdot\ln a$

Mittelwertsatz: $\exists\,\xi$ mit $a\le\xi\le b$, so dass $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Parameterdarstellung

$$\left.\begin{array}{l} y=\psi(t) \\ x=\varphi(t)\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

Polarkoordinaten

$$\left.\begin{array}{l} y=r(\varphi)\cdot\cos\varphi \\ x=r(\varphi)\cdot\sin\varphi\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{r'\cdot\cos\varphi-r\cdot\sin\varphi}{r'\cdot\sin\varphi+r\cdot\cos\varphi}$$

Extrema

ist $f'(x_0)=0$ und $f''(x_0)<0 \quad\Rightarrow\quad x_0$ ist Max

ist $f'(x_0)=0$ und $f''(x_0)>0 \quad\Rightarrow\quad x_0$ ist Min

INTEGRALRECHNUNG

Stamfunktionen

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$\int a\cdot dx$	$ax+c$	$\int x^\alpha\cdot dx$	$\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$\int e^x\cdot dx$	e^x+c	$\int\dfrac{dx}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+c$
$\int\sin x\cdot dx$	$-\cos x+c$	$\int\cos x\cdot dx$	$\sin x+c$	$\int\dfrac{dx}{\cos^2 x}$ $\int\left(1+\tan^2 x\right)dx$	$\tan x+c$	$\int\dfrac{dx}{\sin^2 x}$ $\int\left(1+\cot^2 x\right)dx$	$-\cos x+c$
$\int\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x+c$ $(-1\le x\le 1)$	$\int\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\arccos x+c$	$\int\dfrac{dx}{1+x^2}$	$\arctan x+c$	$\int\dfrac{dx}{1+x^2}$	$-\operatorname{arccot} x+c$
$\int\sinh x\cdot dx$	$\cosh x+c$	$\int\cosh x\cdot dx$	$\sinh x+c$	$\int\dfrac{dx}{\cosh^2 x}$ $\int\left(1-\tanh^2 x\right)dx$	$\tanh x+c$	$\int\dfrac{dx}{\sinh^2 x}$ $\int\left(\coth^2 x-1\right)dx$	$-\coth x+c$
$\int\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arsinh} x+c$	$\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arcosh} x+c$	$\int\dfrac{dx}{1-x^2}$	$\operatorname{artanh} x+c$	$\int\dfrac{dx}{1-x^2}$	$\operatorname{arcoth} x+c$

Regeln

Partielle Integration

$\int u'v\cdot dx=uv-\int uv'dx$

$\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}\cdot dx=\ln\lvert f(x)\rvert+c$

Mittelwertsatz $\quad\exists\,\xi$ mit $a\le\xi\le b$ mit $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$

$\int_0^\infty e^{-x}\cdot x^n\cdot dx=n! \qquad (n\in\mathbb{N})$

stetig $\Rightarrow$ integrierbar

differenzierbar $\Rightarrow$ stetig

differenzierbar $\Rightarrow$ integrierbar

integrierbar $\not\Rightarrow$ differenzierbar

stetig $\not\Rightarrow$ differenzierbar

$$\int\ln x\cdot dx=x\cdot(\ln x-1)$$

$$\int\sin^2\alpha x\,dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4\alpha}\sin^2 2\alpha x$$

$$\int\cos^2\alpha x\,dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4\alpha}\sin^2 2\alpha x$$

Seite 4

ANWENDUNG DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG

Taylor - Reihe

Die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot (x-x_0)^j = f(x)$ heißt Potenzreihe. Wenn sie für $|x-x_0| < a$ konvergiert, heißt a Konvergenzradius.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(4)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Mac Laurin (beliebig oft dfb, um x_0)

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} \cdot x^j$$

Rotation

$$A = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x \qquad V = \pi \int_a^b y^2\,\mathrm{d}x \qquad M = 2\pi \int_a^b y \cdot \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

Fourier - Reihe

Die Funktion $f(x)$ sei periodisch mit der Periode 2π und stückweise monoton stetig, dann gilt:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n} \left(a_j \cdot \cos jx + b_j \cdot \sin jx\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$a_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(jx)\,\mathrm{d}x$$

$$b_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(jx)\,\mathrm{d}x$$

Die Funktion $f(x)$ sei periodisch mit der Periode T und stückweise monoton stetig, dann gilt:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n} \left(a_j \cdot \cos(j\omega x) + b_j \cdot \sin(j\omega x)\right) \quad \text{mit}$$

$$a_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T f(x)\,dx$$

$$a_j = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T f(x) \cdot \cos(j\omega x)\,\mathrm{d}x$$

$$b_j = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T f(x) \cdot \sin(j\omega x)\,\mathrm{d}x$$

Die Funktion $f(x)$ sei gerade in $-\frac{T}{2} \le x \le \frac{T}{2}$, Periode T und stückweise monoton stetig, dann gilt:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \cos(j\omega x) \qquad \left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right) \quad \text{mit}$$

$$a_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$a_j = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T f(x) \cdot \cos(j\omega x)\,\mathrm{d}x = \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \cdot \cos(j\omega x) \cdot \mathrm{d}x$$

Die Funktion $f(x)$ sei ungerade in $-\frac{T}{2} \le x \le \frac{T}{2}$, Periode T und stückweise monoton stetig, dann gilt:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j \cdot \sin(j\omega x) \qquad \left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right) \quad \text{mit}$$

$$b_j = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T f(x) \cdot \sin(j\omega x)\,\mathrm{d}x = \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \cdot \sin(j\omega x)\,\mathrm{d}x$$

de l'Ho.

$$\lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$$

Die Regel von de l'Hopital gilt auch für $\varphi(x) \to \infty$ und $\psi(x) \to \infty$

Integration rationaler Funktionen

$$\int \frac{A}{(x-a)^m}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} A\dfrac{(x-a)^{1-m}}{1-m} & (m \ne 1) \\ A \cdot \ln|x-a| & (m = 1) \end{cases}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \cdot \arctan \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \qquad (b^2-4ac<0)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c} = \frac{2}{2ax+b} \qquad (b^2-4ac=0)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \cdot \ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right| \qquad (b^2-4ac>0)$$

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2a} \cdot \ln\left|ax^2+bx+c\right| + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \cdot \int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}$$

Partialbruchzerlegung

$$Q_m(x) = a(x-\alpha_1)^{k_1} \cdot (x-\alpha_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_p)^{k_p} \qquad a_j = \text{reell}$$

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{(x-\alpha_1)^2} + \frac{A_3}{(x-\alpha_1)^3} + \ldots + \frac{A_{k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \frac{B_1}{x-\alpha_2} + \frac{B_2}{(x-\alpha_2)^2} + \frac{B_3}{(x-\alpha_2)^3} + \ldots + \frac{B_{k_2}}{(x-\alpha)^{k_2}}$$

$$+ \ldots + \frac{C_1}{x-\alpha_p} + \frac{C_2}{(x-\alpha_p)^2} + \frac{C_3}{(x-\alpha_p)^3} + \ldots + \frac{C_{k_p}}{(x-\alpha)^{k_p}}$$

$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,\mathrm{d}x = ?$

(1) Wenn $n \ge m \;\Rightarrow$ man dividiere $P_n(x) : Q_m(x)$ und erhält $P_n(x) : Q_m(x) = S_k(x) + \frac{R_i(x)}{Q_m(x)}$

(2) Man führe für $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ bzw. $\frac{R_i(x)}{Q_m(x)}$ eine Partialbruchzerlegung durch

(3) Man integriere alle Summanden

DIFFERENTIALRECHNUNG VON FUNKTIONEN IN MEHREREN VARIABLEN

in 2 Variablen

Sei $f(x,y)$ differenzierbar $\Rightarrow \quad \dfrac{\partial f}{\partial x} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}$ ist die Steigung von u in x – Richtung (tan des Steigungs∢)

$\dfrac{\partial u}{\partial y}$ ist die Steigung von u in y – Richtung (tan des Steigungs∢)

Satz von Schwarz

Sei $u(x,y)$ zweimal differenzierbar $\Rightarrow \quad u_{xy} = u_{yx}$

Gradient:

$u(x,y)$ differenzierbar $\Rightarrow \quad \operatorname{grad}(u) = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$

Richtungsableitung:

Sei $u(x,y)$ differenzierbar und $\vec r$ eine beliebige Richtung um $\mathbb{R}^2$ mit $|\vec r| = 1$,

dann ist: $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = \vec r \cdot \operatorname{grad}(u)$ die Ableitung (Steigung) in Richtung $\vec r$

$\mathrm{d}u = u_x\,\mathrm{d}x + u_y\,\mathrm{d}y \quad (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$ kleine Zahlen$)$ heißt "vollständiges" oder "totales Differential" und gibt näherungsweise die Zunahme der Funktion $u(x,y)$ an bei Übergang von (x,y) nach $(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y)$ (Höhendifferenz)

Maximum

(1) $u_x = 0; \quad u_y = 0$

(2) Die Eigenwerte λ der Matrix $\begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{yx} & u_{yy} \end{pmatrix} < 0$

Minimum

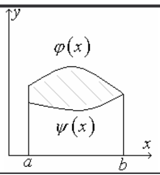
(1) $u_x = 0; \quad u_y = 0$

(2) Die Eigenwerte λ der Matrix $\begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{yx} & u_{yy} \end{pmatrix} > 0$

MEHRFACHE INTEGRALE

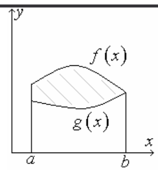
Integrale

$V = \int\limits_a^b \int\limits_{\psi(x)}^{\varphi(x)} u(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$



$V = \int\limits_\alpha^\beta \int\limits_0^b u(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta \int\limits_0^b \int\limits_0^{u(x,y)} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

$A = \int\limits_a^b \int\limits_{g(x)}^{f(x)} u(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$



Schwerpunkt:

$x_s = \dfrac{1}{M} \iiint\limits_K x\,\rho\,\mathrm{d}v$

$y_s = \dfrac{1}{M} \iiint\limits_K y\,\rho\,\mathrm{d}v$

$z_s = \dfrac{1}{M} \iiint\limits_K z\,\rho\,\mathrm{d}v$

$M = \iiint\limits_K \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

Kugelkoordinaten

$\mathrm{d}v = r^2 \sin\theta \cdot \mathrm{d}\theta \cdot \mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}r$

Zylinderkoordinaten

$\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{f(r)} f(r,\varphi)\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$

Guldin’sche Regel

$f(x) \ge 0$, stetig

$y_0 = y$ – Koordinaten des Schwerpunktes der Fläche

$A =$ Flächeninhalt

$V =$ Volumen des Rotationskörpers $\quad (f(x)$ um x – Achse$)$

dann: $\boxed{V = A \cdot 2\pi \cdot y_0}$

DIFFERENTIALGEOMETRIE

Ebene Kurven in kartesischen Koordinaten

$y = f(x) \quad \Rightarrow \quad \kappa(x) = \dfrac{y''}{\sqrt{1+y'^2}^{\,3}} \qquad r = \dfrac{1}{|\kappa|}$

$y = f(x)$ hat in $x = x_0$ Extremum

$\Rightarrow \quad \kappa(x_0) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ Minimum

$ \quad \kappa(x_0) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ Maximum

Seien $y = f(x)$; $y = g(x)$ Kurven.

Kurven schneiden sich bei $x = x_0$ im rechten Winkel, falls

(1) $f(x_0) = g(x_0)$

(2) $f'(x_0) = -\dfrac{1}{g'(x_0)}$

Sei $y = f(x)$ eine Kurve

$y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0)$ Tangente an (x_0, y_0)

$y = y_0 - \dfrac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$ Normale an (x_0, y_0)

Schnittwinkel zweier Kurven

Seien $y = f(x)$; $y = g(x)$ zwei Kurven; Schnittpunkt bei $x = x_0$

$\Rightarrow$ Schnittwinkel: $\tan\gamma = \dfrac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0) \cdot g'(x_0)}$

Kurvenlänge

kartesisch:

$L = \int\limits_a^b \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$

Vektordarstellung

$L = \int\limits_a^b |\vec s\,'(t)|\,\mathrm{d}t \qquad \vec s(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \vec s\,'(t) = \begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \psi'(t) \end{pmatrix}$

Parameterdarstellung

$L = \int\limits_a^b \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}\,\mathrm{d}t \qquad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad a \le t \le b$

VEKTORANALYSIS

Flächenintegrale

Flächenvektor

Es sei A ein ebenes Flächenstück im Raum. Der Vektor $\vec{a}$ heißt Flächenvektor, falls

(1) $\vec{a} \perp A$ (im Sinne einer Rechtsschraube)

(2) $|\vec{a}| = $ Fläche von A $\qquad \Phi = \vec{a} \cdot \vec{v}$

Flächenintegral

$$^{F}\int \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{a} = {}^{F}\oint \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{a}$$

$$\operatorname{grad}(u) = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$$

Gauß'scher Integralsatz

Divergenz

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(x,y,z) \\ v_2(x,y,z) \\ v_3(x,y,z) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

Integralsatz von Gauß

K = Körper mit Oberfläche F und $\vec{v}$ = Vektorfeld

$$\Rightarrow \quad {}^{F}\oint \vec{v} \cdot d\vec{a} = {}^{K}\iiint \operatorname{div}\vec{v}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Quellen & Senken

$\operatorname{div}\vec{v} = 0$ in P

$\Leftrightarrow$ in P existieren keine Quellen und Senken

Elektrostatik

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0} \cdot \rho$$

Kurven-integrale

Symbol:

$$^{k}\int \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{s} = {}^{k}\oint \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{s}$$

$$^{k}\int \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{s} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}\,s'(t)\,\mathrm{d}t$$

wirbelfreie Felder

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Ein Vektorfeld $\vec{v}(x,y,z)$ heißt wirbelfrei,

wenn für jede geschlossene Kurve gilt: $\oint \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{s} = 0$

Es sei A ein Flächenstück mit der Begrenzungskurve k und $\vec{v}(x,y,z)$ ein Vektorfeld

$$^{k}\oint \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{s} = {}^{A}\oint \operatorname{rot}\vec{v}\,\mathrm{d}\vec{a} \qquad \text{(Stokes)}$$

Potentialtheorie

$\vec{v}$ = Vektorfeld

Falls es eine Funktion $u = u(x,y,z)$ gibt, so dass $\vec{v} = \operatorname{grad}(u)$ ist,

heißt u Potentialfunktion oder Potential.

In diesem Fall heißt $\vec{v}$ ein konservatives Feld oder ein wirbelfreies Feld.

Ein Vektorfeld $\vec{v}(x,y,z)$ besitzt genau dann ein Potential, wenn $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$

Kreis: $\quad s(t) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos t \\ r \cdot \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$

 Seite 7

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Dgl 1.Ordnung

linear homogen $y' = a(x)\cdot y$

$$y' = a(x)y \;\Rightarrow\; \frac{y'}{y} = a(x) \;\Rightarrow\; \int \frac{y'}{y}\mathrm{d}x = \int a(x)\mathrm{d}x + c \;\Rightarrow\; \ln|y| = \int a(x)\mathrm{d}x + c$$

$$\Rightarrow\; |y| = \mathrm{e}^{\int a(x)\mathrm{d}x + c} = y \;\Rightarrow\; y = \mathrm{e}^{\int a(x)\mathrm{d}x}\cdot \underbrace{\mathrm{e}^{c}}_{c'} = c'\cdot \mathrm{e}^{\int a(x)\mathrm{d}x}$$

linear inhomogen $y' = a(x)\cdot y + b(x)$

(1) Lösung der homogenen Dgl $\quad y' = a(x)y \;\Rightarrow\; \frac{y'}{y} = a(x) \;\Rightarrow\; y = \mathrm{e}^{\int a(x)\mathrm{d}x}\cdot \underbrace{\mathrm{e}^{c}}_{\gamma} \;\Rightarrow\; y = \gamma\cdot \mathrm{e}^{\int a(x)\mathrm{d}x}$

(2) Variation der Konstanten γ

Ansatz: $\quad y = \gamma(x)\mathrm{e}^{\int a(x)\mathrm{d}x}$

$$y' = \gamma'(x)\cdot \mathrm{e}^{\int a(x)\mathrm{d}x} + \gamma(x)\cdot \mathrm{e}^{\int a(x)\mathrm{d}x}\cdot a(x)$$

einsetzen: $\quad y' = \gamma'(x)\cdot \mathrm{e}^{\int a(x)\mathrm{d}x} + a(x)\cdot \underbrace{\gamma(x)\cdot \mathrm{e}^{\int a(x)\mathrm{d}x}}_{y} = a(x)\cdot y + b(x) \;\underset{\text{immer kürzen!}}{\Rightarrow}\; \gamma'(x)\cdot \mathrm{e}^{\int a(x)\mathrm{d}x} = b(x)$

$$\Rightarrow\; \gamma'(x) = b(x)\cdot \mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x} \;\Rightarrow\; \gamma(x) = \int b(x)\cdot \mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + c$$

Lösung: $\quad y = \left[\int b(x)\cdot \mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + c\right]\cdot \mathrm{e}^{\int a(x)\mathrm{d}x}$

Trennung der Variablen $y' = f(x)\cdot g(y)$

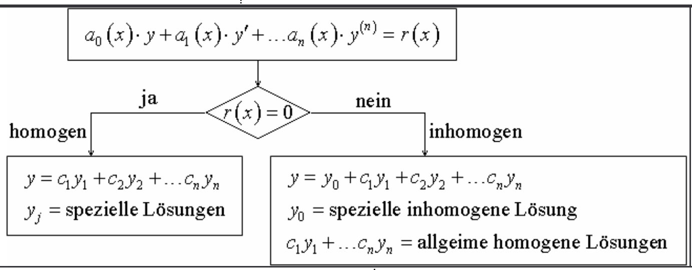
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)\cdot g(y) \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; \int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\cdot \mathrm{d}x$$

$\Rightarrow$ nach y auflösen $\Rightarrow$ $y = \ldots$ (Lösung)

Dgl höherer Ordnung

$y^{(n)} = f(x)$	n mal integrieren $\;\Rightarrow\; y = \ldots$
$y''\cdot y' = f(x)$	$y''\cdot y' = \frac{1}{2}\left(y'^2\right)' \;\Rightarrow\; \left(y'^2\right)' = 2\cdot f(x) \;\Rightarrow\; y'^2 = 2\int f(x)\mathrm{d}x + c_1 \Rightarrow\; y = \int\sqrt{\int f(x)\mathrm{d}x + c_1}\cdot \mathrm{d}x + c_2$
$F(x, y', y'') = 0$	Substitution: $\; y' = z \;\Rightarrow\; F(x, z, z') = 0$

lineare Dgl



Aufsuchen einer speziellen Lösung bei $a_0\cdot y + a_1\cdot y' + a_2\cdot y'' + \ldots a_n\cdot y^{(n)} = r(x)$

$r(x)$	Bemerkung	Ansatz
Polynom Grad n		Polynom Grad $\geq n$
$a\cdot e^{px}$	$p \neq$ Lösung charakteristischen Gleichung	$y_0 = A\cdot e^{px}$
$a\cdot e^{px}$	$p =$ Lösung charakteristischen Gleichung	$y_0 = x^m\cdot A\cdot e^{px}$
$a\cdot \cos px + b\cdot \sin px$	$j\cdot p \neq$ Lösung charakteristischen Gleichung	$y_0 = A\cdot \cos px + B\cdot \sin px$
$a\cdot \cos px + b\cdot \sin px$	$j\cdot p =$ Lösung charakteristischen Gleichung	$y_0 = x^m\left(A\cdot \cos px + B\cdot \sin px\right)$

lineare Dgl mit konstanten Koeffizienten

$$a_0y + a_1y' + a_2y'' + \ldots a_ny^{(n)} = 0$$

Man löse die charak. Gl.

$$a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots a_n\lambda^n = 0$$

und erhält die Nullstelle λ

[1] λ reell, Vielfachheit ist k $\quad\Rightarrow\quad y_1 = \mathrm{e}^{\lambda x};\quad y_2 = x\,\mathrm{e}^{\lambda x};\quad \ldots;\quad y_k = x^{k-1}\,\mathrm{e}^{\lambda x}$

[2] $\lambda = u + \mathrm{j}v$ komplex, Vielfachheit 1 $\quad\Rightarrow\quad y_1 = \mathrm{e}^{ux}\cos(vx);\quad y_2 = \mathrm{e}^{ux}\sin(vx)$

[3] $\lambda = u + \mathrm{j}v$ komplex, Vielfachheit k

$$\Rightarrow\quad y_1 = \mathrm{e}^{ux}\cos(vx) \qquad y_{k+1} = \mathrm{e}^{ux}\sin(vx)$$
$$y_2 = x\mathrm{e}^{ux}\cos(vx)\;\ldots \qquad y_{k+2} = x\,\mathrm{e}^{ux}\sin(vx)\;\ldots$$
$$y_k = x^{k-1}\mathrm{e}^{ux}\cos(vx) \qquad y_{2k} = x^{k-1}\mathrm{e}^{ux}\sin(vx)$$

$a_0\cdot y + a_1\cdot y' + a_2\cdot y'' + \ldots a_n\cdot y^{(n)} = P_k(x) \qquad \left(P_k(x) = \text{Polynom vom Grad } k\right)$

Eine spezielle Lösung findet man durch den unbestimmten Ansatz

$y_0 = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots b_mx^m \quad (m \geq k)$ wobei die b_j durch Koeffizientenvergleich bestimmt werden.

$a_0\cdot y + a_1\cdot y' + a_2\cdot y'' + \ldots a_n\cdot y^{(n)} = A\mathrm{e}^{px}$

Fall1: p keine Lösung der charakteristischen Gleichung $\quad\Rightarrow\quad$ Ansatz: $\; y_0 = A\mathrm{e}^{px}$

Fall2: p ist m – fache Lösung der charakteristischen Gleichung $\quad\Rightarrow\quad$ Ansatz: $\; y_0 = Ax^m\,\mathrm{e}^{px}$

$a_0\cdot y + a_1\cdot y' + a_2\cdot y'' + \ldots a_n\cdot y^{(n)} = A\cos px + B\sin px$

Fall1: $\mathrm{j}\,p$ keine Lösung der charakteristischen Gleichung $\quad\Rightarrow\quad$ Ansatz: $\; y_0 = A\cos px + B\sin px$

Fall2: $\mathrm{j}\,p$ ist m – fache Lösung der charakteristischen Gleichung $\quad\Rightarrow\quad$ Ansatz: $\; y_0 = x^m\left(A\cos px + B\sin px\right)$

Anwendung

Ein Anfangswertproblem (AWP) ist gegeben :

1. durch eine Dgl
2. durch zusätzliche Anfangsbedingungen der Form

$$y(a) = \alpha_0;\quad y'(a) = \alpha_1;\quad y''(a) = \alpha_2;\quad \ldots\quad y^{(k)}(a) = \alpha_k$$

so, dass die Lösung eindeutig wird.

Ein Randwertproblem (RWP) ist gegeben

1. durch eine Dgl
2. durch zusätzliche Anfangsbedingungen der Form

$$y(a) = \alpha;\quad y(b) = \beta;\quad y(c) = \gamma;\quad \ldots\quad y(k) = \kappa$$

so, dass die Lösung in $a \leq x \leq b$ eindeutig wird.

Ein EWP besteht aus: 1. durch eine Dgl mit einem unbekannten Faktor (Eigenwert) 2. Randbdg (evtl mit unbek. Faktor)

Taylor – Reihe

$y=\dfrac{1}{1-x}$ Wähle $x_0=0$ $\left(\text{um } x_0=0 \text{ entwickeln}\right)$

$$
\begin{aligned}
&y=(1-x)^{-1} &&\Rightarrow && y(0)=1\\
&y'=(1-x)^{-2} &&\Rightarrow && y'(0)=1\\
&y''=2(1-x)^{-3} &&\Rightarrow && y''(0)=2\\
&y'''=3!(1-x)^{-4} &&\Rightarrow && y'''(0)=3!
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad y=\frac{1}{1-x}=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\ldots=1+x+x^2+x^3+\ldots$$

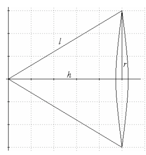
$y=\sin x$ um $x_0=0$ entwickeln

$$
\begin{aligned}
&y=\sin x &&\Rightarrow && y(0)=0\\
&y'=\cos x &&\Rightarrow && y'(0)=1\\
&y''=-\sin x &&\Rightarrow && y''(0)=0\\
&y'''=-\cos x &&\Rightarrow && y'''(0)=-1\\
&y^{(4)}=\sin x &&\Rightarrow && y^{(4)}(0)=0
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad \sin x=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\frac{y^{(4)}(0)}{4!}x^4+\frac{y^{(5)}(0)}{5!}x^5+\ldots$$

$$=0+x+\frac{0}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3+\frac{0}{4!}x^4-\frac{1}{5!}x^5+\ldots=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\frac{1}{9!}x^9-\ldots$$

Rotation

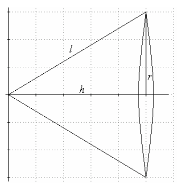


Mantelfläche eines Kegels

$$y=ax+b=ax=\frac{r}{h}\cdot x$$

$$A=2\pi\int_0^h y\sqrt{1+y'^2}\cdot dx=2\pi\int_0^h\frac{r}{h}\cdot x\sqrt{1+\frac{r^2}{h^2}}\cdot dx=2\pi\frac{r}{h}\sqrt{1+\frac{r^2}{h^2}}\int_0^h x\cdot dx=2\pi\frac{r}{h}\sqrt{1+\frac{r^2}{h^2}}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^h=2\pi\frac{r}{h}\cdot\frac{1}{h}\sqrt{h^2+r^2}\cdot\frac{h^2}{2}=\pi\cdot r\cdot l=A$$

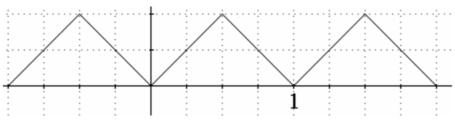
Volumen Kegel



$$y=ax+b \quad\Rightarrow\quad y=ax=\frac{r}{h}x$$

$$V=\pi\int_0^h y^2dx=\pi\int_0^h\frac{r^2}{h^2}x^2dx=\pi\frac{r^2}{h^2}\int_0^h x^2dx=\pi\frac{r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h=\pi\frac{r^2}{h^2}\frac{h^3}{3}=\frac{1}{3}r^2\pi h$$

Fourier – Reihe



$$y=\begin{cases} x & \left(0\le x\le \frac{1}{2}\right)\\ (1-x) & \left(\frac{1}{2}\le x\le 1\right)\end{cases}$$

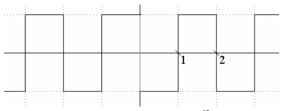
$$y=\frac{a_0}{2}+\sum_{j=1}^{\infty}\left(a_j\cdot\cos(j\omega x)+b_j\cdot\sin(j\omega x)\right)\quad T=1\quad\Rightarrow\quad \omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi$$

$$a_0=\frac{\omega}{\pi}\int_0^1 y\cdot dx=2\left[\int_0^{0,5}x\cdot dx+\int_{0,5}^1 x\cdot dx\right]=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$a_j=\frac{\omega}{\pi}\int_0^1 y\cdot\cos(j\omega x)\cdot dx=2\left[\int_0^{0,5}x\cdot\cos(j2\pi x)\,dx+\int_{0,5}^1(1-x)\cdot\cos(j2\pi x)\,dx\right]=\begin{cases}0 & (j \text{ gerade})\\ -\dfrac{2}{\pi^2 j^2} & (j \text{ ungerade})\end{cases}$$

$$b_j=\frac{\omega}{\pi}\int_0^1 y\cdot\sin(j\omega x)\cdot dx=2\left[\int_0^{0,5}x\cdot\sin(j2\pi x)\,dx+\int_{0,5}^1(1-x)\cdot\sin(j2\pi x)\,dx\right]=0$$

$\Rightarrow$ Fourierreihe: $y=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{\pi^2}\left[\dfrac{\cos(1\cdot 2\pi x)}{1^2}+\dfrac{\cos(3\cdot 2\pi x)}{3^2}+\dfrac{\cos(5\cdot 2\pi x)}{5^2}+\ldots\right]$



$$y=\begin{cases}1 & (-1\le x\le 0)\\ -1 & (0\le x\le 1)\end{cases}\qquad (\text{mit periodischer Fortsetzung})$$

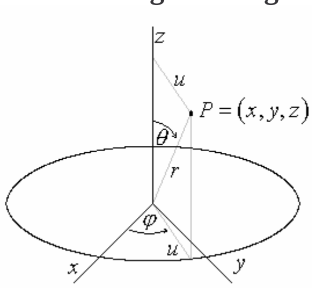
ungerade $\Rightarrow\quad f(x)=\sum_{j=1}^{n} b_j\cdot\sin(j\omega x)\qquad \omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{2}=\pi$

$$b_j=\frac{2\omega}{\pi}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\cdot\sin(j\omega x)\cdot dx=\frac{2\pi}{\pi}\int_0^1(-1)\cdot\sin(j\omega x)\cdot dx=-2\int_0^1\sin(j\omega x)\cdot dx$$

$$=-2\left[\frac{-\cos(j\pi x)}{j\pi}\right]_0^1=-\frac{2}{j\pi}\left[-\cos j\pi-(-\cos 0)\right]=-\frac{2}{j\pi}\left[-\cos j\pi+1\right]=\begin{cases}0 & (j\text{ gerade})\\ -\dfrac{4}{\pi j} & (j\text{ ungerade})\end{cases}$$

$\Rightarrow$ Fourierreihe: $\Rightarrow\quad y=-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin 1\pi x}{1}+\frac{\sin 3\pi x}{3}+\frac{\sin 5\pi x}{5}+\dots\right]$

Umrechnung von Kugelkoordinaten in kartesische Koordinaten



(1) $\cos\theta=\frac{z}{r}\quad\Rightarrow\quad z=r\cdot\cos\theta$

(2) $\sin\theta=\frac{u}{r}\quad\Rightarrow\quad u=r\cdot\sin\theta$

$\cos\varphi=\frac{x}{u}\quad\Rightarrow\quad x=u\cdot\cos\varphi=r\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi$

(3) $\sin\varphi=\frac{y}{u}\quad\Rightarrow\quad y=u\cdot\sin\varphi=r\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi$

$\Rightarrow$ Umrechnungsformeln

$x=r\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi$

$y=r\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi$

$z=r\cdot\cos\theta$

Bsp2: $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$

$r\cdot\cos\theta=\sqrt{16-r^2\cdot\sin^2\theta\cdot\cos^2\varphi-r^2\cdot\sin^2\theta\cdot\sin^2\varphi}\quad\Rightarrow\quad r^2\cdot\cos^2\theta=16-r^2\cdot\sin\theta\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)$

$\Rightarrow\quad r^2\cdot\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta=16\quad\Rightarrow\quad r^2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)=4^2\qquad r=4$

Richtungsableitung:

Geg sei die Funktion $f(x,y)=3x^2y-2xy+1$. Wie groß ist die Abl. von $\vec{r}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ im P $(1,1)$ und wie groß ist der Steigungswinkel?

$$\operatorname{grad}(u)=\begin{pmatrix}u_x\\u_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6xy-2y\\3x^2-2x\end{pmatrix}\underset{(1,1)}{=}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_0=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\frac{1}{|\vec{r}\,|}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$\frac{du}{dr_0}=\vec{r}_0\cdot\operatorname{grad}(u)=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 6=2{,}68$$

Steigungswinkel: $\tan\alpha=\frac{du}{dr_0}=2{,}68\quad\Rightarrow\quad\alpha=68{,}8°$

Extremwertaufgaben

$u(x,y)=x^2-x\cdot y+y^2+12x-9y+1\qquad$ gesucht: Extrema

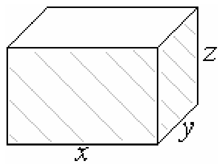
$$\left.\begin{aligned}u_x&=2x-y+12=0\quad\Rightarrow\quad 2x-y=-12\\ u_y&=-x+2y-9=0\quad\Rightarrow\quad -x+2y=9\end{aligned}\right\}\underset{\text{CRAMER}}{\Rightarrow}\quad x=\frac{\begin{vmatrix}-12&-1\\9&2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&-1\\-1&2\end{vmatrix}}=\frac{-24+9}{3}=-5\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}2&-12\\-1&9\end{vmatrix}}{3}=\frac{18-12}{3}=2$$

Bei $x=-5;\ y=2$: Extrenum?

$$\begin{pmatrix}u_{xx}&u_{xy}\\u_{yx}&u_{yy}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}\underset{\text{Eigenwerte}}{\Rightarrow}\begin{vmatrix}2-\lambda&-1\\-1&2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)^2-1=0\quad\Rightarrow\quad\lambda^2-4\lambda+3=0\quad\Rightarrow\quad\lambda=2\pm\sqrt{4-3}=\begin{cases}3\\1\end{cases}$$

$\lambda_1=3\,|\,\lambda_2=1\quad\Rightarrow\quad\lambda_j>0\quad\Rightarrow\quad$ min $\qquad$ In $(-5,2)$ existiert ein Minimum

Bsp2: Eine Kiste, die $1m^3$ fassen soll und oben offen ist, soll so ausgelegt werden, dass der Materialverbrauch minimal ist.



Fläche: $A = x \cdot y + 2xz + 2yz = \text{Min}$

Nebenbedingung: $V = x \cdot y \cdot z = 1 \quad \Rightarrow \quad z = \dfrac{1}{x \cdot y}$

$$\Rightarrow \quad A = x \cdot y + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x \cdot y} + 2 \cdot y \cdot \frac{1}{x \cdot y} = x \cdot y + \frac{2}{y} + \frac{2}{x} = \text{Min}$$

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial A}{\partial x} = y - \dfrac{2}{x^2} = 0 \\ \dfrac{\partial A}{\partial y} = x - \dfrac{2}{y^2} = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x^2 \cdot y = 2 \\ x \cdot y^2 = 2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x^2 y = 2 \\ x^2 y^4 = 4 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad y^3 = 2 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt[3]{2} \qquad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{2} - \frac{2}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{2}$$

$x = 1,26$

$y = 1,26$

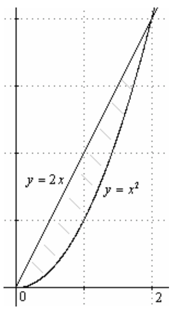
$z = \dfrac{1}{x \cdot y} = 0,63$

$$M = \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x^{-3} & 1 \\ 1 & 4x^{-3} \end{pmatrix} \underset{(1,26|1,26)}{=} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(A - \lambda E\right) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(2-\lambda\right)^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} > 0 \Rightarrow \text{Min}$$

Volumenberechnung

Bsp1: $u\left(x, y\right) = xy^2$

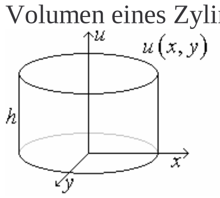


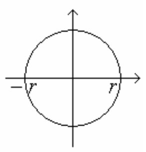
Schnittpunkt (für die Grenzen): $2x = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

$$V = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} xy^2 \cdot dy \cdot dx = \int_0^2 \left[x \frac{y^3}{3} \right]_{x^2}^{2x} dx = \int_0^2 \left(x \frac{8x^3}{3} - x \frac{x^6}{3} \right) dx = \int_0^2 \left(\frac{8}{3} x^4 - \frac{1}{3} x^7 \right) dx$$

$$= \left[\frac{8}{3} \frac{x^5}{5} - \frac{1}{3} \frac{x^8}{8} \right]_0^2 = \frac{8}{3} \frac{2^5}{5} - \frac{1}{3} \frac{2^8}{8} = 6,4$$

Bsp3: Volumen eines Zylinders





$u\left(x, y\right) = h$

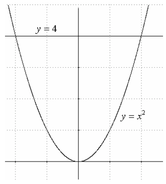
$x^2 + y^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$

$$V = \int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} h \cdot dy \cdot dx = \int_{-r}^{r} \left[hy\right]_{-\sqrt{}}^{\sqrt{}} \cdot dx = h\int_{-r}^{r} \left(\left(\sqrt{r^2 - x^2} \right) - \left(-\sqrt{r^2 - x^2} \right) \right) dx = 2h\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 2h\int_{-r}^{r} r\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} \cdot dx$$

$$\underset{\substack{\frac{x}{r} = \sin\varphi \\ dx = r\cos\varphi \cdot d\varphi}}{=} 2hr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2\varphi} \cdot r \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi = 2hr^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \cdot d\varphi \underset{\cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)}{=} 2hr^2 \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \cos 2\varphi\right) d\varphi$$

$$= r^2 h \left[\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = r^2 h \left[\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0 \right) - \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0 \right) \right] = r^2 \pi h$$

Bsp4: Welche Fläche wird von den Kurven $y = x^2$ und $y = 4$ eingeschlossen?



Nullstellen:

$x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$

$$A = \int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{4} dy \cdot dx = \int_{-2}^{2} \left[y\right]_{x^2}^{4} \cdot dx = \int_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right) dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{2} = \left(4 \cdot 2 - \frac{8}{3} \right) - \left(-4 \cdot 2 + \frac{8}{3} \right) = 10,667$$

Bsp1: Kugelvolumen $\quad (R = \text{Kugelradius})$

$$V = \iiint^{K} dv = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot dr = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} d\varphi \cdot dr = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \left[-(-1)-(-1)\right] d\varphi \cdot dr$$

$$= 2\int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 d\varphi \cdot dr = 2\int_0^R \left[r^2\varphi\right]_0^{2\pi} dr = 2\int_0^R r^2 \cdot 2\pi \cdot dr = 4\pi \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Bsp1: Kreisumfang $\quad (\text{Einheitskreis: } r = 1)$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{1-x^2} = \left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$L_{\text{Halbkreis}} = L = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+y'^2} \cdot dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}} \cdot dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}} \cdot dx = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\arcsin x\right]_{-1}^{1} = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \pi$$

AWP

Bsp3: Ein Geschoss werde senkrecht nach oben abgeschossen. Die Anfangsgeschwindigkeit sei v_0.
Man berechne die Höhenfunktion $y(t)$. $\quad$ (Luftreibung vernachlässigt)

$$\left.\begin{array}{l} y'' = -g \\ y(0) = 0 \\ y' = v_0 \end{array}\right. \quad \text{AWP} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{l} y'' = -g \\ y' = -gt + c_1 \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_2 \end{array}$$

Anfangsbedingung:

$$y(0) = 0 = -\frac{1}{2}g0 + c_1 0 + c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0$$

$$y'(0) = v_0 = -g0 + c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = v_0$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$$

RWP

Bsp3: $y'' - 3y = 0$

$y(0) = 0$

$y(1) = e^{\sqrt{3}}$

Dgl: $\quad y'' - 3y = 0$

$\lambda^2 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm\sqrt{3} = 0 \pm \sqrt{3}$

$\Rightarrow \quad y = c_1 e^{\sqrt{3}x} + c_2 e^{-\sqrt{3}x}$

Randbedingungen

$$y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -c_2$$

$$y(1) = c_1 e^{\sqrt{3}} + c_2 e^{-\sqrt{3}} = c_1\left[e^{\sqrt{3}} - e^{-\sqrt{3}}\right] = e^{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{e^{\sqrt{3}}}{e^{\sqrt{3}} - e^{-\sqrt{3}}} = 1{,}03 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -1{,}03$$

Lösung: $\quad y = 1{,}03e^{\sqrt{3}x} - 1{,}03e^{-\sqrt{3}x}$

EWP

Bsp2: $y'' = -\alpha y$

$y(0) = y(2) = 0$

Dgl: $\quad y'' + \alpha y = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm\sqrt{\alpha} \cdot j$

$$\Rightarrow \quad y = c_1 \cos\sqrt{\alpha}x + c_2 \sin\sqrt{\alpha}x$$

$$y(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0$$

$$y(2) = c_2 \sin\sqrt{\alpha}2 = 0$$

$\Rightarrow \quad$ (1) $\quad c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$

(2) $\quad \sin\sqrt{\alpha}2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\alpha}2 = n\pi \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \alpha = \frac{n^2\pi^2}{4} \qquad c_2 = \text{beliebig}$